

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Patrik Zajec

**Nevložljivost realne projektivne
ravnine v R^3**

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI
ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: izred. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2018

COPYRIGHT. Rezultati diplomske naloge so intelektualna lastnina avtorja in Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavo in koriščenje rezultatov diplomske naloge je potrebno pisno privoljenje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil L^AT_EX.

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Opišite, kako lahko predstavimo kompaktne ploskve brez roba, in jih klasificirajte. Pokažite, da lahko poln graf K_6 na 6 točkah vložimo v realno projektivno ravnino \mathbb{P} . S pomočjo dejstva, da vsaka vložitev grafa K_6 v \mathbb{R}^3 vsebuje netrivialen splet, pokažite, da realne projektivne ravnine \mathbb{P} ni moč vložiti v trirazsežni evklidski prostor \mathbb{R}^3 .

Literatura:

H. Maehara, *Why is P^2 not embeddable in R^3 ?* Amer. Math. Monthly 100 (1993), no. 9, 862–864.

Kazalo

Povzetek

Abstract

1	Uvod	1
2	Projektivna ravnina \mathbb{P}^2 in primeri ploskev	3
2.1	Idealne točke	3
2.2	Projektivna ravnina	5
2.3	Identifikacije stranic	8
2.4	Möbiusov trak v projektivni ravnini	11
2.5	Povezane vsote	13
3	Osnovni gradniki	15
3.1	Mnogoterosti	15
3.2	Simplicialni kompleks	17
3.3	Abstraktni simplicialni kompleks	24
3.4	Triangulacija	26
3.5	Orientacija	29
4	Klasifikacija ploskev	31
4.1	Predstavitev ploskev	31
4.2	Klasifikacija krivulj in kompaktnih ploskev	39
4.3	Orientabilnost	47

5	Netrivialni splet grafa K_6	49
5.1	Osnove teorije vozlov	49
5.2	Netrivialen splet grafa K_6	54
6	Vložljivost ploskev v \mathbb{R}^3	59
6.1	Povezava med \mathbb{M} in K_6	59
6.2	Nevložljivost neorientabilnih ploskev	60
	Literatura	63

Povzetek

Naslov: Nevložljivost realne projektivne ravnine v R^3

Avtor: Patrik Zajec

V diplomskem delu predstavimo elementaren dokaz za nevložljivost realne projektivne ravnine v 3-razsežni evklidski prostor ter obravnavamo vložljivost kompaktnih ploskev brez roba na splošno. Začnemo s kratko predstavitvijo koncepta idealnih točk iz projektivne geometrije ter podamo nekaj geometričnih predstavitev realne projektivne ravnine. Z zgledi predstavimo osnovne kompaktne ploskve ter opišemo pojem orientabilnosti. Nadaljujemo z dokazom klasifikacijskega izreka za kompaktne ploskve brez roba, ki pove, da je vsaka orientabilna kompaktna ploskev homeomorfna sferi ali povezani vsoti torusov, vsaka neorientabilna pa povezani vsoti projektivnih ravnin. Iz izreka neposredno sledi vložljivost orientabilnih ploskev, večina dokazov za nevložljivost neorientabilnih ploskev pa zahteva poznavanje tehnik algebraične topologije. Z uporabo lastnosti polnega grafa K_6 prirejenega triangulaciji Möbiusovega traku dokažemo nevložljivost neorientabilnih kompaktnih ploskev brez roba.

Ključne besede: topologija, realna projektivna ravnina, klasifikacija ploskev, vložljivost ploskev.

Abstract

Title: Non-embeddability of real projective plane in R^3

Author: Patrik Zajec

The main goal of this thesis is to present the elementary proof for non-embeddability of real projective plane in the 3-dimensional Euclidean space and to study the embeddability of closed surfaces in general. We start with the short introduction of ideal points concept from projective geometry and present different geometrical presentations of real projective plane. Next we prove the classification theorem for closed surfaces which states that any connected closed surface is homeomorphic to the sphere, a connected sum of tori or a connected sum of real projective planes. Embeddability of orientable surfaces follows immediately from the classification of closed surfaces while the proofs for non-embeddability of non-orientable surfaces usually require techniques from algebraic topology. We prove the non-embeddability of non-orientable closed surfaces using the property of the graph K_6 embedded in the Möbius strip.

Keywords: topology, real projective plane, classification of surfaces, embeddability of surfaces.

Poglavje 1

Uvod

Realna projektivna ravnina je kompaktna ploskev brez roba, sestavljena iz Möbiusovega traku in diska. Dejstvo, da ni vložljiva v 3-razsežni evklidski prostor, je dobro znano. Večina dokazov temelji na tehnikah algebraične topologije [1]. V delu predstavimo elementaren dokaz, ki temelji na presenetljivem dejstvu, da vsaka vložitev grafa K_6 v prostor \mathbb{R}^3 vsebuje netrivialen splet. Z istim argumentom pokažemo, da v evklidski prostor ni moč vložiti nobene neorientabilne ploskve brez roba.

V 2. poglavju predstavimo koncept idealne točke iz projektivne geometrije ter njegovo povezavo z realno projektivno ravnino \mathbb{P} . Podamo nekaj geometričnih predstavitev \mathbb{P} ter opišemo njene topološke lastnosti. Pokažemo nekaj primerov osnovnih kompaktnih ploskev brez roba, kako jih lahko uporabimo kot gradnike pri konstrukciji novih ploskev ter podrobneje opišemo koncept orientabilnosti.

3. poglavje namenimo osvežitvi pojmov mnogoterost in simplicialni kompleks ter povemo nekaj o triangulaciji krivulj in ploskev. Koncepti, predstavljeni v tem poglavju, so osnovni gradniki za dokaz klasifikacijskega izreka kompaktnih ploskev brez roba v nadaljevanju.

V 4. poglavju poiščemo enostavnejšo predstavitev ploskev z besedo. Predstavimo množico elementarnih transformacij, s pomočjo katerih dokažemo klasifikacijski izrek za kompaktne ploskve brez roba.

5. poglavje začnemo s predstavitvijo osnovnih konceptov iz teorije vozlov, predstavimo primere ločljivih in neločljivih spletov ter povemo nekaj o spletnem številu. Poglavje zaključimo z dokazom izreka, ki pravi, da vsaka vložitev polnega grafa K_6 v prostor vsebuje neločljivi (netrivialen) splet. Slednji izrek je ključen za dokaz nevložljivosti projektivne ravnine v \mathbb{R}^3 .

Zaključimo s 6. poglavjem, v katerem poiščemo K_6 v triangulaciji Möbiusovega traku ter pokažemo, kako iz tega sledi nevložljivost projektivne ravnine. Z enakim argumentom dokažemo nevložljivost poljubne neorientabilne kompaktne ploskve brez roba.

Poglavje 2

Projektivna ravnina \mathbb{P}^2 in primeri ploskev

2.1 Idealne točke

Slika, ki jo slikar naslika na platno, je projekcija, odvisna od slikarjevega položaja v prostoru. Dolžine in koti na sliki se s spremembo položaja zelo spreminjajo, a vendar lahko objekte na sliki večinokrat brez težav prepoznamo. Očitno obstajajo neke geometrične lastnosti, ki se s projekcijo ne spreminjajo, kar nam omogoča, da objekt prepoznamo. S študijo takih geometričnih lastnosti so se skozi zgodovino ukvarjali številni umetniki, kot sta na primer Leonardo da Vinci in Albrecht Dürer. Iskanje in preučevanje teh lastnosti je temeljna naloga projektivne geometrije.

V projektivni geometriji o dolžinah in kotih ne govorimo na isti način kot v elementarni, evklidski geometriji, saj dolžina in kot očitno nista invarianta glede na projekcijo. Za nas pomembna razlika med projektivno in elementarno geometrijo je način, kako v projektivni geometriji obravnavamo presečišča premic.

Eden izmed temeljnih aksiomov evklidske geometrije pravi, da sta premici vzporedni natanko tedaj, ko nimata skupnih točk (presečišč). To, da presečišče poljubnih premic ne obstaja vedno, v posebnih primerih vnese

dodatno kompleksnost. Vsak dokaz, ki vključuje presečišče premic, bi moral obravnavati tudi poseben primer, ko sta premici vzporedni, kar bi projektivno geometrijo po nepotrebnem zakompliciralo. Koncepte elementarne geometrije bi radi razširili tako, da bi se temu izognili. Želimo pa tudi, da na novo uvedeni koncepti spoštujejo vse temeljne aksiome elementarne geometrije.

Pomagajmo si z intuicijo. Imejmo par premic, ki se sekata v nekem presečišču. Če eno izmed premic iz para počasi premikamo proti vzporedni legi, se presečišče pomika proti neskončnosti. Za par vzporednih premic bi tako lahko rekli, da se sekata v neskončnosti.

Dodajmo vsaki premici p v ravnini še neko točko v neskončnosti, ki ji bomo rekli **idealna točka**. Za to točko naj velja, da leži le na premicah, ki so premici p vzporedne. Poljubna premica p' , ki je premici p vzporedna, bo tako imela presečišče s p v taki točki.

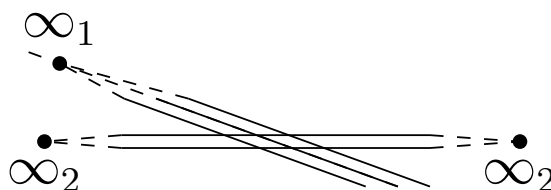
Premica se v neskončnost nadaljuje v dveh smereh, kar namiguje, da bi morali biti idealni točki dve, po ena za vsako smer. Eden izmed aksiomov elementarne geometrije pravi, da lahko skozi vsaki dve točki narišemo natanko eno premico. Če bi namesto ene idealne točke na premici p uvedli dve, bi skozi ti dve točki lahko narisali premico p ter tudi vse ostale premice, ki so premici p vzporedne. S tem bi aksiom očitno kršili.

Z uvedbo idealnih točk smo dosegli, da imata poljubni premici v ravnini presečišče: premici, ki se sekata, imata za presečišče navadno točko v ravnini, premici, ki sta vzporedni, pa se sekata v natanko eni idealni točki.

Poskrbeti moramo, da bodo tudi idealne točke zadoščale aksiomu, da lahko skozi vsaki dve točki poteka natanko ena premica. Poleg idealnih točk v ravnino zato dodamo še natanko eno idealno premico, ki vsebuje vse idealne točke. Skozi dve idealni točki navadna premica prav gotovo ne more potekati, saj na vsaki navadni premici leži natanko ena idealna točka. Prav tako idealna premica ne more vsebovati navadne točke, saj navadna in idealna točka skupaj določata navadno premico. Idealna premica mora prav gotovo vsebovati vse idealne točke, saj želimo, da se z vsako navadno premico seka v kakšni točki.

2.2 Projektivna ravnina

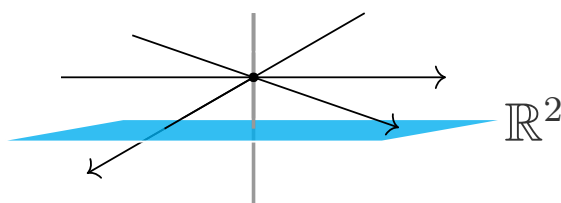
Ravnini \mathbb{R}^2 z dodanim konceptom idealnih točk pravimo **projektivna ravnina**, označimo jo s \mathbb{P} .



Slika 2.1: Evklidska ravnina z idealnimi točkami

V projektivni ravnini imata dve poljubni premici skupno presečišče; bodisi je presečišče navadna točka ravnine ali pa idealna točka. Vsaka premica p določa idealno točko, ki je skupna natanko vsem premicam, ki so premici p vzporedne. Poljuben šop vzporednih premic se tako seka v skupni idealni točki. Čeprav se premica nadaljuje v neskončnost v obeh smereh, je idealna točka le ena.

Točke projektivne ravnine lahko predstavimo z različnimi geometrijskimi modeli. Iščemo čim enostavnejšo predstavitev.

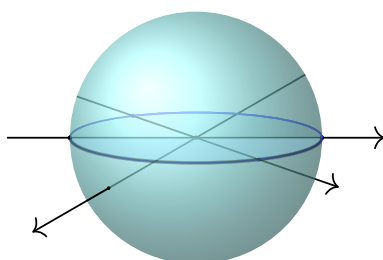


Slika 2.2: Predstavitev točk projektivne ravnine v \mathbb{R}^3 z žarki

Predstavitev z žarki. Evklidsko ravnino vložimo v \mathbb{R}^3 s preslikavo $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{-1\}$. Vsako točko projektivne ravnine predstavimo z žarkom (premico) skozi izhodišče (slika 2.2). Vsako navadno točko predstavlja žarek skozi izhodišče, ki vloženo evklidsko ravnino seka natanko v tej točki. Vsako

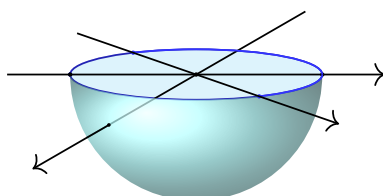
idealno točko predstavlja žarek skozi izhodišče, ki je vloženi evklidski ravnini vzporeden (leži v $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$). Projekcija žarka idealne točke na vloženo ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{-1\}$ natanko določa množico vzporednih premic, ki jim je idealna točka skupna. Vsak žarek predstavlja natanko eno točko – bodisi navadno ali idealno. Želimo si bolj simetričnega modela, v katerem bodo točke projektivne ravnine predstavljene s točkami in ne žarki.

Predstavitev s sfero. Točke projektivne ravnine predstavimo s točkami na sferi. Vsaka točka je predstavljena s presečišči žarka s sfero. Vsak žarek sfero seka v natanko dveh točkah, zato ima vsaka točka projektivne ravnine dve predstavitvi. Žarki, ki ustrezajo idealnim točkam, sfero sekajo na ekvatorju.



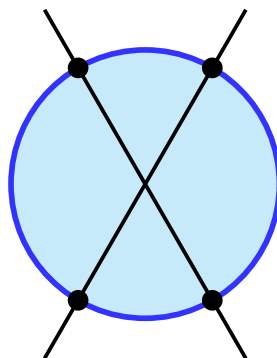
Slika 2.3: Predstavitev točk projektivne ravnine na sferi

Ker ima žarek vsake navadne točke presečišče na obeh polsferah, lahko zgornjo polsfero odstranimo.



Slika 2.4: Predstavitev točk projektivne ravnine na polsferi

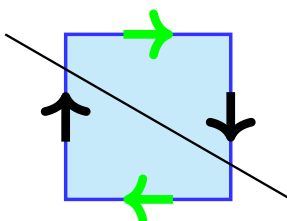
Vsaka navadna točka projektivne ravnine ima na polsferi le eno predstavitev. Idealne točke so predstavljene s presečišči žarkov z ekvatorjem, tako ima vsaka idealna točka dve predstavitvi.



Slika 2.5: Predstavitev točk projektivne ravnine z diskom

Predstavitev z diskom in pravokotnikom. Predstavitev s plosfero lahko sploščimo v disk (slika 2.5). S svetlo modro barvo označimo notranjost diska, v kateri ležijo predstavitve navadnih točk projektivne ravnine.

Meja diska je ekvator sfere, na katerem ležijo predstavitve idealnih točk. Vsaka idealna točka je predstavljena z dvema točkama z meje diska. Če želimo le eno predstavitev za vsako točko, moramo točke z meje diska paroma identificirati.

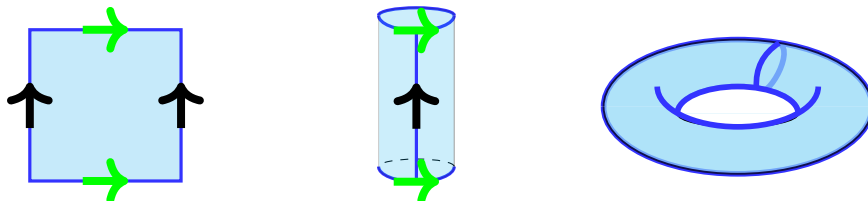


Slika 2.6: Predstavitev točk projektivne ravnine s pravokotnikom

Identifikacijo točk lahko prikažemo tudi na meji pravokotnika. Disk preoblikujemo v pravokotnik (slika 2.6). S svetlo modro barvo označimo notranjost pravokotnika, ki ustreza notranjosti diska. Stranice pravokotnika z isto barvo puščice paroma identificiramo v smeri, ki jo puščica določa. Če stranice pravokotnika na sliki 2.6 zlepimo skupaj, dobimo objekt, ki ga ne moremo vložiti v \mathbb{R}^3 , ne da bi sekal samega sebe.

Če smer puščic na pravokotniku malo spremenimo ter stranice zlepimo, dobimo objekt, ki ga v 3-razsežnem prostoru brez težav narišemo. Rečemo

mu torus (slika 2.7).



Slika 2.7: Predstavitev točk torusa s pravokotnikom

Če stranice pravokotnika označimo kot na sliki 2.8 ter jih paroma zlepimo, dobimo predstavitev v 3-razsežnem prostoru, ki jo lahko preoblikujemo do sfere.



Slika 2.8: Predstavitev točk sfere s pravokotnikom

2.3 Identifikacije stranic

Vidimo, da lahko s spreminjanjem oznak na stranicah pravokotnika dobimo različne objekte. Nekatere lahko v 3-razsežnem prostoru primerno prikažemo, za nekatere druge pa bomo pokazali, da tak prikaz gotovo ne obstaja. V procesu lepljenja enako označene stranice združimo tako, da v nastalem objektu predstavljajo eno samo daljico. Točke stranic se pri tem linearno identificirajo, da se smeri puščic ujemata. Pravimo, da se stranice identificirajo z linearnim homeomorfizmom v smeri, ki jo določa puščica.

Puščice, ki označujejo stranice za identifikacijo bomo namesto z enako barvo raje označili s simbolom. Stranici, ki se paroma identificirata, bomo označili z enakim simbolom, s puščico pa bomo podali smer identifikacije. Na sliki 2.9 identifikacije stranic v pravokotniku za predstavitev torusa in

sfere namesto z barvnimi puščicami kot na slikah 2.7 in 2.8 predstavimo s simbolom in smerjo identifikacije.



Slika 2.9: Identifikacije stranic pri predstavitvi sfere in torusa

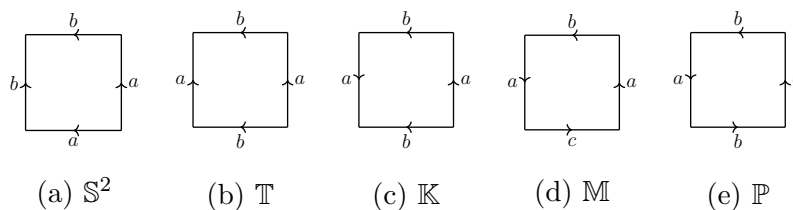
Predstavitev lahko še dodatno poenostavimo. Začnemo v spodnjem desnem oglišču pravokotnika ter potujemo po stranicah v nasprotni smeri urinega kazalca, dokler se ne vrnemo na začetek. Iz simbolov stranic, ki jih prepotujemo, tvorimo besedo. Simbol stranice, ki smo jo prepotovali v nasprotni smeri puščice, v besedi dodatno označimo z oznako $^{-1}$.



Slika 2.10: Predstavitev identifikacij z besedo

Pravokotnike s slike 2.10 predstavimo z besedama $abb^{-1}a^{-1}$ ter $aba^{-1}b^{-1}$.

Poglejmo si primere objektov, ki nastanejo pri različnih izbirah identifikacij stranic.



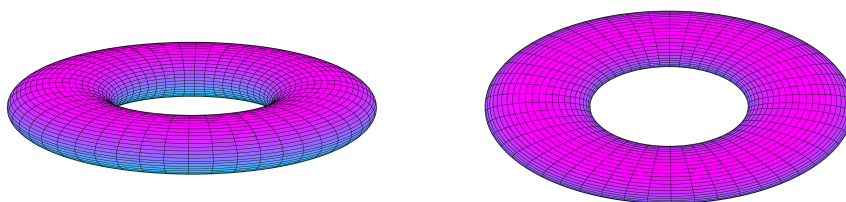
Slika 2.11: Različne identifikacije stranic pravokotnika

Sfera. Če stranice pravokotnika označimo z besedo $abb^{-1}a^{-1}$ ter jih identificiramo, dobimo prostor, homeomorfen sferi (slika 2.12). Sfero označimo s \mathbb{S}^2 .



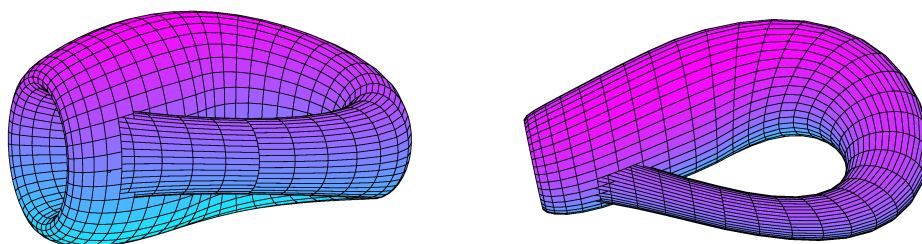
Slika 2.12: Sfera

Torus. Če stranice pravokotnika označimo z besedo $aba^{-1}b^{-1}$ ter jih identificiramo, dobimo prostor, homeomorfen torusu (slika 2.13). Torus označimo s \mathbb{T} .



Slika 2.13: Torus

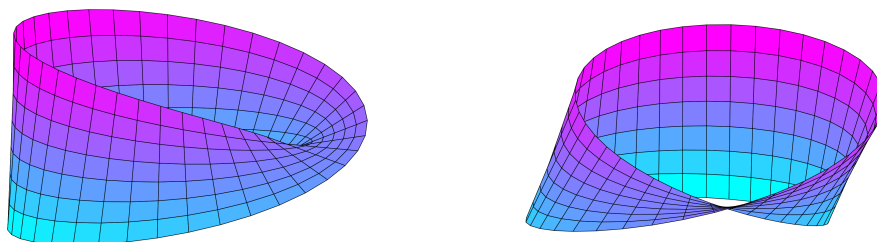
Kleinova steklenica. Kleinovo steklenico (slika 2.14) dobimo, če stranice pravokotnika označimo z besedo $abab^{-1}$. Označimo jo s \mathbb{K} .



Slika 2.14: Kleinova steklenica

Möbiusov trak. Möbiusov trak dobimo iz identifikacije, podane z besedo $abac$. Če model Möbiusovega traku izdelamo iz papirja, opazimo, da ima

za razliko od navadnega traku le eno stran. Ker Möbiusov trak nima notranje in zunanje strani, pravimo, da je **neorientabilen**. Pojem neorientabilnosti bomo natančneje definirali v nadaljevanju.



Slika 2.15: Möbiusov trak

Vsem prikazanim objektom pravimo **ploskve**. Sfera, torus, projektivna ravnina in Kleinova steklenica so primeri **ploskev brez roba**, ki jih bomo obravnavali v nadaljevanju, Möbiusov trak pa je **ploskev z robom**.

Ploskve se delijo na **orientabilne** in **neorientabilne**. Ploskev je **neorientabilna** natanko tedaj, ko vsebuje Möbiusov trak. Primera neorientabilnih ploskev brez roba sta Kleinova steklenica in projektivna ravnina. Da projektivna ravnina res vsebuje Möbiusov trak, bomo pokazali v naslednjem razdelku. Velja, da neorientabilnih ploskev brez roba nikakor ne moremo vložiti v \mathbb{R}^3 . Model Kleinove steklenice očitno lahko narišemo (slika 2.14), a to ni vložitev, saj ni injektivna (Kleinova steklenica seka samo sebe).

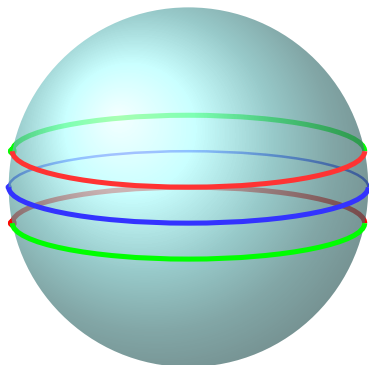
Orientabilni ploskvi sta sfera \mathbb{S}^2 in torus \mathbb{T} , sliki 2.12 in 2.13 sta njuni vložitvi v \mathbb{R}^3 .

Möbiusov trak je seveda tudi neorientabilna ploskev, a ima za razliko od \mathbb{P} in \mathbb{K} rob. Slika 2.21 je njegova vložitev v \mathbb{R}^3 .

2.4 Möbiusov trak v projektivni ravnini

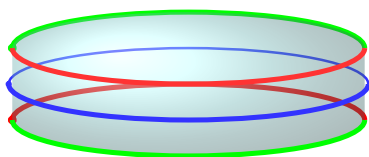
Kleinova steklenica in projektivna ravnina sta primera neorientabilnih ploskev. Če na mejo Möbiusovega traku prilepimo disk, dobimo projektivno ravnino, če na mejo prilepimo Möbiusov trak, pa dobimo Kleinovo steklenico.

V predstavitvi projektivne ravnine s sfero poiščimo Möbiusov trak.



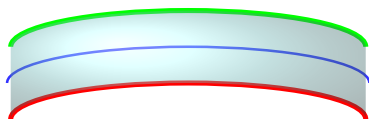
Slika 2.16: Predstavitev točk projektivne ravnine na sferi

Sfero razdelimo na tri regije. Severni in južni pol sta vsebovana vsak v svojem disku, ekvator pa leži v traku. Trdimo, da je to Möbiusov trak.



Slika 2.17: Izrezan trak

Nasprotni točke na traku predstavljajo isto točko projektivne ravnine. Trak lahko razdelimo na dva dela ter obdržimo le polovico, na kateri bo imela vsaka točka še vedno vsaj eno predstavitev (slika 2.18).



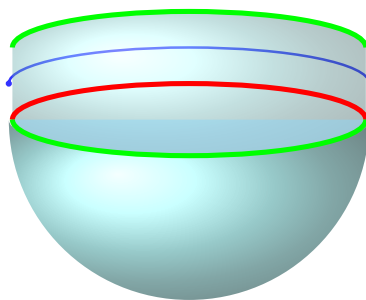
Slika 2.18: Polovica traku

Vsaka točka na polovici traku ima natanko eno predstavitev, razen točk na levem in desnem robu. Če želimo levi in desni rob pravilno identificirati, moramo lepljenje izvesti v nasprotnih smereh, tako dobimo Möbiusov trak.

Del projektivne ravnine torej predstavlja Möbiusov trak, iz česa pa je sestavljen preostanek? Zgornji in spodnji del na sliki 2.16 sta diska, katerih

točke se paroma identificirajo. Oba predstavljata isti disk, zato lahko enega odstranimo. Prav tako lahko odstranimo polovico traku, ki vsebuje ekvator.

Ostaneta nam disk in Möbiusov trak. Točke zgornje meje Möbiusovega traku (na sliki 2.19 označena z zeleno) se identificirajo s točkami zgornje meje diska. Vidimo, da projektivno ravnino sestavljata disk in Möbiusov trak, prilepljena po meji.



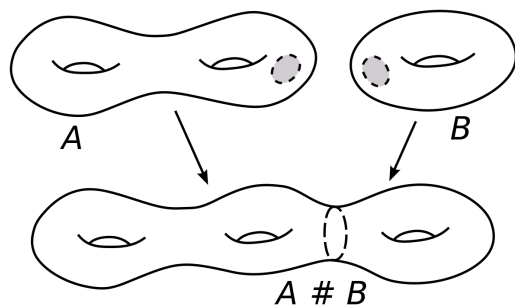
Slika 2.19: Sestavni deli projektivne ravnine

2.5 Povezane vsote

Ploskve, ki smo jih spoznali v razdelku 2.3, lahko uporabimo kot gradnike pri konstrukciji novih ploskev z operacijo, ki ji rečemo **povezana vsota**.

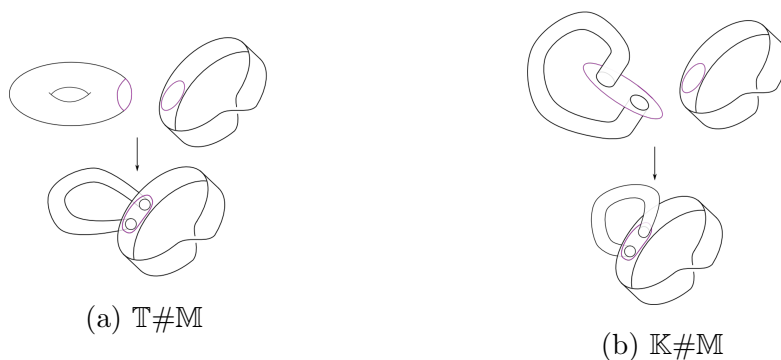
Poljubni ploskvi A in B s povezano vsoto združimo v eno – označimo $A\#B$. Iz obeh ploskev izrežemo disk ter nastala robova zlepimo skupaj (slika 2.20). V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko poljubno ploskev brez roba do homeomorfizma natančno predstavimo s sfero, povezano vsoto torusov ali povezano vsoto projektivnih ravnin. Ploskve, ki jih lahko predstavimo s sfero ali povezano vsoto torusov, so orientabilne, zanje tudi očitno obstaja vložitev v \mathbb{R}^3 (na sliki 2.20 je vložitev povezane vsote treh torusov). Vse neorientabilne ploskve brez roba pa lahko do homeomorfizma natančno predstavimo s povezano vsoto projektivnih ravnin. Pokazali bomo, da zaradi posebnih lastnosti Möbiusovega traku projektivna ravnina ni vložljiva v \mathbb{R}^3 . Isti argument bomo uporabili tudi pri dokazu, da povezana vsota projektivnih ravnin

ni vložljiva v \mathbb{R}^3 , iz česar sledi, da tudi nobena neorientabilna ploskev brez roba ni vložljiva v \mathbb{R}^3 .



Slika 2.20: Povezana vsota torusov

Za ploskve z robom trditev o nevložljivosti ne velja. Möbiusov trak je primer neorientabilne ploskve z robom, v \mathbb{R}^3 ga lahko vložimo. Prav tako lahko v \mathbb{R}^3 vložimo povezano vsoto torusa in Möbiusovega traku ter celo povezano vsoto Kleinove steklenice in Möbiusovega traku.



Slika 2.21: Vložitev neorientabilnih ploskev z robom

Poglavje 3

Osnovni gradniki

3.1 Mnogoterosti

Mnogoterost je abstrakten matematičen prostor z lokalno evklidsko strukturo.

Definicija 3.1 *Topološki prostor X je **lokalno evklidski** prostor razsežnosti n , če ima vsaka točka okolico U , homeomorfno odprti podmnožici prostora \mathbb{R}^n ; tako okolico imenujemo **evklidska okolica**.*

Struktura mnogoterosti je lahko zelo zapletena, zaradi lokalno evklidske lastnosti pa lahko dovolj majhne okolice točk obravnavamo kot podmnožice \mathbb{R}^n , ki jih dobro razumemo.

Definicija 3.2 ***Mnogoterost** razsežnosti $n \in \mathbb{N}_0$ (ali na kratko n -mnogoterost) je 2-števen Hausdorffov topološki prostor, v katerem ima vsaka točka okolico, homeomorfno odprti podmnožici prostora \mathbb{R}^n .*

Opomba: Poznamo tudi mnogoterosti z robom, ki so zajete s splošnejšo definicijo, v katerih ima vsaka točka n -mnogoterosti okolico, homeomorfno odprti podmnožici $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$. V nadaljevanju bomo obravnavali le mnogoterosti brez roba, ki so podane z zgornjo definicijo.

Trditev 3.3 *Topološki prostor M je lokalno evklidski prostor razsežnosti n natanko tedaj, ko veljata ekvivalentni izjavi:*

(a) *vsaka točka iz M ima okolico, homeomorfno odprti krogli v \mathbb{R}^n ;*

(b) *vsaka točka iz M ima okolico, homeomorfno \mathbb{R}^n .*

Dokaz. Izjavi sta ekvivalentni, ker je vsaka odprta krogla v \mathbb{R}^n homeomorfna \mathbb{R}^n . Naj bo $p \in M$ točka z okolico U ter $f : U \rightarrow V$ homeomorfizem med U in odprto množico V v \mathbb{R}^n . Ker je V odprta, gotovo obstaja odprta krogla $K = K(f(p), \epsilon) \subset V$. Množica $f^{-1}(K)$ je odprta okolica za p , homeomorfna odprti krogli $K \subset \mathbb{R}^n$. \square

Ker ima vsaka točka p iz n -mnogoterosti okolico, homeomorfno odprti krogli v \mathbb{R}^n , ima p bazo evklidskih okolic.

Primer 3.4 *Primeri mnogoterosti*

(i) *krožnica \mathbb{S}^1 je kompaktna 1-mnogoterost brez roba;*

(ii) *torus, sfera in projektivna ravnina iz poglavja 2 so povezane kompaktna 2-mnogoterosti.*

Eden izmed pomembnejših problemov v topologiji je klasifikacija mnogoterosti. Idealno bi želeli imeti spisek vseh možnih razredov homeomorfnihih n -mnogoterosti ter postopek, ki bi za poljubno n -mnogoterost določil, v kateri homeomorfni razred spada. Pokazali bomo, da tak spisek obstaja za 1-mnogoterosti ter za kompaktna 2-mnogoterosti brez roba.

Definicija 3.5 *Povezanim kompaktnim 2-mnogoterostim pravimo **ploskve**.*

V razdelku 2.5 smo pokazali, kako lahko z operacijo povezane vsote konstruiramo nove ploskve. **Povezana vsota** je definirana nad mnogoterostmi v splošnem. Velja, da je povezana vsota dveh povezanih n -mnogoterosti M_1 in M_2 tudi povezana n -mnogoterost. Geometrično izgleda povezana vsota tako, da iz M_1 in M_2 izrežemo majhna, odprta diska ter nastala roba identificiramo.

Bolj formalno, izberimo odprti vložitvi $\phi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ in $\phi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow M_2$. Iz mnogoterosti M_1 in M_2 izrežemo odprti krogi $B_1 = \phi_1(K(0, 1))$, $B_2 = \phi_2(K(0, 1))$, rezultat sta mnogoterosti $M'_1 = M_1 \setminus B_1$, $M'_2 = M_2 \setminus B_2$. Izberemo homeomorfizem $h : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ ter definiramo kvocientni prostor $M'_1 \sqcup M'_2$, v katerem vsak $p \in \partial B_1$ identificiramo s $h(p) \in \partial B_2$. Zlepku $M'_1 \cup_h M'_2$ pravimo **povezana vsota** mnogoterosti M_1 in M_2 , označimo ga z $M_1 \# M_2$.

Rezultat $M_1 \# M_2$ je seveda odvisen od izbire vložitev ϕ_1 in ϕ_2 ter homeomorfizma h . Ko sta M_1 in M_2 ploskvi, so rezultati vseh različnih izbir med sabo homeomorfni.

3.2 Simplicialni kompleks

Evklidski simplicialni kompleks

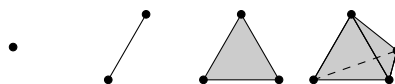
Afina preslikava med \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m je kompozitum linearne preslikave $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in translacije z vektorjem $b \in \mathbb{R}^m$. Točko $x \in \mathbb{R}^n$ slika v $Lx + b$.

Točke $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ so afino neodvisne, če so vektorji $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$ linearno nedvisni.

Definicija 3.6 *Simpleks razsežnosti k ali na kratko k -simpleks v \mathbb{R}^n je konveksna ogrinjača $k + 1$ afino neodvisnih točk v \mathbb{R}^n . Za dane afino neodvisne točke v_0, v_1, \dots, v_k je simpleks, razpet s temi točkami, enak*

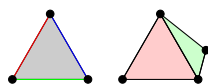
$$[v_0, v_1, \dots, v_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}.$$

Točke v_0, v_1, \dots, v_k imenujemo oglišča simpleksa, množico oglišč označimo z $\sigma^{(0)}$.



Slika 3.1: Simpleksi

Definicija 3.7 Lice k -simpleksa σ je vsak simpleks τ , razpet na neko podmnožico njegovih oglišč; označimo $\tau \leq \sigma$. 0-razsežna lica simpleksa σ so oglišča, $k - 1$ -razsežna lica pa so **glavna lica**. Množico vseh lic razsežnosti n označimo z $\sigma^{(n)}$.



Slika 3.2: Glavna lica 2- in 3-simpleksa.

Definicija 3.8 Preslikava f med simpleksoma $\sigma \subset \mathbb{R}^m$ in $\tau \subset \mathbb{R}^k$ je **simplicialna**, če je zožitev neke afine preslikave $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, ki slika oglišča simpleksa σ v oglišča simpleksa τ .

Trditev 3.9 Simplicialna preslikava f je natanko določena s sliko oglišč $f_0 : \sigma^{(0)} \rightarrow \tau^{(0)}$.

Dokaz. Slika poljubne točke $v \in \sigma$ za dano simplicialno preslikavo f je

$$f(v) = f\left(\sum_{i=0}^k t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i f_0(v_i).$$

□

Simpleksa σ in τ sta opremljena s topologijo podprostora. Lahko govorimo o homeomorfizmu dveh simpleksov.

Trditev 3.10 Naj bo k nenegativno celo število. Poljubna k -simpleksa $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ in $\tau \subset \mathbb{R}^m$ za $n, m \geq k$ sta homeomorfna.

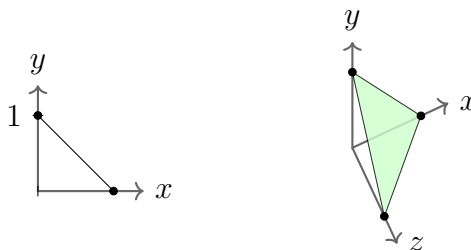
Dokaz. Simpleks σ razpenjajo oglišča v_0, \dots, v_k , simpleks τ pa oglišča w_0, \dots, w_k . Obstaja linearna preslikava $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ki vektor $v_i - v_0$ preslika v vektor $w_i - w_0$ za vsak $i = 1, \dots, k$. Preslikava $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, podana z

$A(x) = L(x) + b$ za $b = w_0 - L(v_0)$, je afina. Velja:

$$\begin{aligned} A(v_i) &= A(v_i - v_0 + v_0) \\ &= L(v_i - v_0 + v_0) + w_0 - L(v_0) \\ &= L(v_i - v_0) + w_0 \\ &= w_i - w_0 + w_0 \\ &= w_i. \end{aligned}$$

Zožitev $h = A|_{\sigma}$ je iskani homeomorfizem. □

Standardni k -simpleks Δ^k je konveksna podmnožica v \mathbb{R}^{k+1} . Razpet je s standardnimi baznimi vektorji $\{e_1, e_2, \dots, e_{k+1}\}$ v \mathbb{R}^{k+1} .



Slika 3.3: Standardni 1- in 2-simpleks

Iz trditve 3.11 sledi, da je standardni k -simpleks homeomorfen zaprti krogli \mathbb{B}^{k+1} .

Trditev 3.11 Naj bo K kompaktna, konveksna podmnožica v \mathbb{R}^n z neprazno notranjostjo. Obstaja homeomorfizem $h : K \rightarrow \mathbb{B}^n$, ki $Meja(K)$ slika v \mathbb{S}^{n-1} .

Dokaz. Predpostavimo, da je $0 \in Int(K)$. Če ni, izberemo točko $c \in Int(K)$ ter prostor \mathbb{R}^n transliramo z $x \mapsto x - c$.

Želimo konstruirati homeomorfizem $f : Meja(K) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$. Opazujmo žarek r , ki se začne v izhodišču $0 \in K$ ter poteka skozi neko mejno točko $x_0 \in Meja(K)$. Ker je K kompaktna množica, žarek r pa zaprt, je presek $K \cap r$ kompakten v K . Tako obstaja točka $x_0 \in K \cap r$, ki je od izhodišča

najbolj oddaljena ter gotovo leži na $Meja(K)$. Trdimo, da je v preseku $r \cap Meja(K)$ natanko ena točka.

Obstaja $\epsilon > 0$, da $K(0, \epsilon) \subset K$. Vsak žarek med $y \in K(0, \epsilon)$ in x_0 je vsebovan v K . Točka oblike λx_0 za $0 \leq \lambda < 1$, je vsebovana v odprti krogli $K(\lambda x_0, \epsilon(1 - \lambda))$. Ker so vse točke λx_0 za $0 \leq \lambda < 1$ notranje seka žarek r mejo množice K le v točki x_0 . Preslikava

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

je tako injektivna in surjektivna. Ker je množica $Meja(K)$ kompaktna, \mathbb{S}^{n-1} pa Hausdorffov prostor, je f zaprta preslikava in posledično homeomorfizem.

Preslikavo f uporabimo pri konstrukciji homeomorfizma $\mathbb{B}^n \rightarrow K$. Preslikava $F : \mathbb{B}^n \rightarrow K$, določena z $F(0) = 0$ in

$$F(x) = |x| f^{-1} \left(\frac{x}{|x|} \right)$$

za $x \neq 0$, slika vsako točko $x \in \mathbb{B}^n$ linearno na žarek, ki poteka iz izhodišča $0 \in K$ skozi mejno točko $f^{-1} \left(\frac{x}{|x|} \right) \in Meja(K)$.

Pokažimo, da je F zvezna v točki 0. Velja, da je $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0^n$ natanko tedaj, ko je $\lim_{x \rightarrow 0} |F(x)| = 0$. Ker je K omejena, obstaja R , da velja $|y| < R$ za vsak $y \in K$. Zato je $\left| f^{-1} \left(\frac{x}{|x|} \right) \right| < R$ za vsak $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Ker je tudi $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, je

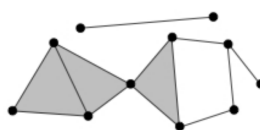
$$\lim_{x \rightarrow 0} |F(x)| = |x| \left| f^{-1} \left(\frac{x}{|x|} \right) \right| = 0,$$

torej je F zvezna.

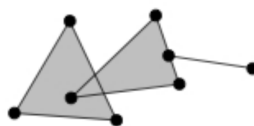
Točka x žarek z začetkom v izhodišču natanko določa, nanj pa se slika linearno glede na $|x| \in (0, 1]$, tako je F očitno injektivna. Ker vsaka točka $y \in K$ leži na nekem žarku, je F tudi surjektivna. F slika iz kompaktnega v Hausdorffov prostor, torej je zaprta in tudi homeomorfizem. \square

Definicija 3.12 *Evklidski simplicialni kompleks* K je družina simpleksov v \mathbb{R}^m , ki zadošča pogojem:

- če je simpleks $\sigma \in K$, potem je vsako lice σ tudi v K ;
- presek simpleksov $\sigma, \tau \in K$ je prazen ali lice obeh;
- vsaka točka simpleksa $\sigma \in K$ ima okolico, ki seka le končno mnogo simpleksov iz K .



Slika 3.4: Primer veljavnega 2-razsežnega simplicialnega kompleksa



Slika 3.5: Primer neveljavnega 2-razsežnega simplicialnega kompleksa

Razsežnost K je določena kot največja razsežnost simpleksa, ki ga K vsebuje.

Unija vseh simpleksov iz K skupaj s topologijo podprostora \mathbb{R}^n je topološki prostor, ki mu pravimo **topološki polieder**, označimo ga z $|K|$.

Primer 3.13 *Evklidski poliedri:*

- n -simpleks σ skupaj z vsemi svojimi lici določa simplicialni kompleks, katerega polieder je simpleks σ sam, homeomorfen \mathbb{B}^n ;
- množica glavnih lic n -razsežnega simpleksa σ , ki tvori rob $\partial\sigma$ je simplicialni kompleks, katerega polieder je homeomorfen \mathbb{S}^{n-1} ;

- (c) množica vseh enotskih intervalov $\{[n, n+1] \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (1-simpleks) skupaj z množico oglišč $\{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (0-simpleks) je simplicialni kompleks, katerega polieder je \mathbb{R} ;
- (d) množica oglišč in robov pravilnega m -stranega mnogokotnika v ravnini tvori simplicialni kompleks, katerega polieder je homeomorfen \mathbb{S}^1 .

Trditev 3.14 Topologija poliedra $|K|$ je usklajena s topologijo simpleksov $\sigma \in K$.

Lema 3.15 Naj bo $\{X_\lambda\}$ zaprto pokritje prostora X , ki je lokalno končno. Tedaj je $A \subset X$ zaprta natanko takrat, ko je $X_\lambda \cap A$ zaprta v X_λ za vse λ (povzeto po [6]).

Dokaz. Če je A zaprt v X , so zaprti tudi vsi preseki $X_\lambda \cap A$.

Obratno, ker je X lokalno končen, ima poljuben $x \notin A$ okolico U , ki seka le končno mnogo členov pokritja, označimo jih z $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_k}$. Po predpostavki je za $i = 1, \dots, k$ presek $A \cap X_{\lambda_i}$ zaprt v X_{λ_i} in zato tudi zaprt v X (saj je X_{λ_i} zaprt v X). Tedaj je $V = (X_{\lambda_1} \cap A)^c \cup \dots \cup (X_{\lambda_k} \cap A)^c$ odprta množica v X , ki ne vsebuje A , ter $U \cap V$ odprta okolica za $x \notin A$, ki ne seka A . Ker za vsako točko $x \notin A$ obstaja odprta okolica, ki A ne seka, je A zaprta množica v X . \square

Dokaz. (Trditev 3.14) Simpleksi iz K so v poliedru $|K|$ zaprti. Ker po definiciji 3.12 vsaka točka iz K seka končno mnogo simpleksov, tvorijo simpleksi iz K lokalno končno zaprto pokritje za $|K|$. Po lemi 3.15 je topologija $|K|$ usklajena s topologijo simpleksov. \square

Definicija 3.16 Zvezna preslikava med poliedroma $f : |K| \rightarrow |L|$ je **simplicialna**, če velja:

- (i) slika vsakega simpleksa $\sigma \in K$ je simpleks v L ;
- (ii) zožitev $f|_\sigma$ na poljuben simpleks $\sigma \in K$ je simplicialna preslikava med simpleksoma σ in $f(\sigma) \in L$.

Trditev 3.9 pokaže, da je simplicialna preslikava med poljubnima simpleksomoma σ in τ natanko določena s sliko oglišč simpleksa σ . Posledično to velja tudi za simplicialno preslikavo med poliedri.

Trditev 3.17 Vsaka simplicialna preslikava $f : |K| \rightarrow |L|$ je natanko določena s sliko oglišč $K^{(0)}$.

Dokaz. Zožitev simplicialne preslikavo $f : |K| \rightarrow |L|$ na poljuben simpleks $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \in K$ je simplicialna preslikava med simpleksomoma σ in $f(\sigma) \in L$, ki je po trditvi 3.9 natanko določena s sliko oglišč $[f(v_0), \dots, f(v_k)]$.

Zožitev f na oglišča (0-simplekse) v K tako enolično določa preslikavo f , saj za poljubno točko x k -simpleksa $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ velja:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^k t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^k t_i f(v_i) = \sum_{i=0}^k t_i f_0(v_i)$$

za $f_0 = f|_{K^{(0)}}$. □

Trditev 3.18 Naj bo f simplicialna preslikava med poliedroma $|K|$ in $|L|$ ter f_0 zožitev f na oglišča simplicialnega kompleksa K . Če velja:

- (i) f_0 je bijektivna;
- (ii) v_0, \dots, v_k so oglišča simpleksa iz K natanko tedaj, ko so $f_0(v_0), \dots, f_0(v_k)$ oglišča simpleksa iz L ;

je f homeomorfizem med $|K|$ in $|L|$.

Dokaz. Ker je f_0 bijektivna, je število oglišč v K enako številu oglišč v L . Oglišča $\{v_0, \dots, v_k\}$ razpenjajo k -simpleks v K natanko tedaj, ko so oglišča $\{f_0(v_0), \dots, f_0(v_k)\} = w_0, \dots, w_k$ paroma različna ter razpenjajo k -simpleks v L . Zožitev $f|_{\sigma}$ na poljuben k -simpleks $\sigma \in K$ je homeomorfizem med σ in k -simpleksom $f(\sigma) \in L$. □

Velja torej, da sta poliedra $|K|$ in $|L|$ homeomorfna natanko tedaj, ko imata simplicialna kompleksa K in L izomorfno **ogliščno shemo**. Kot ogliščno shemo simplicialnega kompleksa K si predstavljamo družino množic

oglišč iz K , ki v K razpenjajo simpleks. Če obstaja bijektivna preslikava g , ki množice ogliščne sheme za K bijektivno slika v množice ogliščne sheme za L , potem obstaja tudi homeomorfizem med poliedroma $|K|$ in $|L|$. V nadaljevanju definiramo abstraktni simplicialni kompleks kot ogliščno shemo nekega evklidskega simplicialnega kompleksa.

3.3 Abstraktni simplicialni kompleks

Motivirani s posledico trditve 3.18 definiramo pojem abstraktnega simplicialnega kompleksa.

Definicija 3.19 *Abstraktni simplicialni kompleks \mathcal{K} je družina končnih, nepraznih podmnožic, ki jim rečemo **abstraktni simpleksi**. Za vsak abstraktni simpleks $\sigma \in \mathcal{K}$ velja, da je vsaka prava podmnožica σ tudi v \mathcal{K} .*

Elementom abstraktnega simpleksa $v \in \sigma$ pravimo **oglišča**, vsaki neprazni podmnožici simpleksa $\tau \subset \sigma$ pravimo **lice**.

Vzemimo poljuben evklidski simplicialni kompleks K . S \mathcal{K} označimo družino končnih množic oglišč $\{v_0, \dots, v_k\} \subset K^{(0)}$, ki v K razpenjajo simpleks. Družina končnih množic \mathcal{K} je abstraktni simplicialni kompleks, ki mu rečemo tudi **ogliščna shema** za K . Kot vidimo, lahko evklidski simplicialni kompleks do homeomorfizma natančno določimo z ogliščno shemo oziroma s prirejenim abstraktnim simplicialnim kompleksom. Abstraktni simpleksi v abstraktnem kompleksu \mathcal{K} so zgolj množice oglišč, katerih vsaka neprazna podmnožica tudi razpenja nek abstraktni simpleks iz \mathcal{K} . Vsaka simplicialna preslikava med simpleksoma je natanko določena s sliko oglišč, poljubna dva evklidska k -simpleksa pa sta homeomorfna. Poiščemo tako geometrično realizacijo $|\sigma|$ abstraktnega k -simpleksa σ , da je homeomorfna evklidskemu k -simpleksu.

Definicija 3.20 *Geometrična realizacija abstraktnega simplicialnega kompleksa \mathcal{K} je unija geometričnih realizacij abstraktnih simpleksov $|\sigma|$ za vsak $\sigma \in \mathcal{K}$. Naravna vložitev $\pi : \sqcup |\sigma| \rightarrow |\mathcal{K}|$ določa kvocientno topologijo na $|\mathcal{K}|$.*

Za tako definirano geometrično realizacijo abstraktnega kompleksa \mathcal{K} , ki je ogliščna shema nekega evklidskega simplicialnega kompleksa K , velja, da ima geometrično realizacijo $|\mathcal{K}|$ homeomorfno poliedru $|K|$. Za tak kompleks očitno velja naslednja trditev.

Trditev 3.21 *Naj bo \mathcal{K} abstraktni simplicialni kompleks, ki je ogliščna shema nekega evklidskega simplicialnega kompleksa K , ter $|\mathcal{K}|$ njegova geometrična realizacija. Veljajo naslednje trditve.*

- (i) *Vsak simpleks $|\sigma|$ je kompaktna, zaprta podmnožica v $|\mathcal{K}|$.*
- (ii) *Topologija $|\mathcal{K}|$ je usklajena s topologijo podprostorov $\{|\sigma| \mid \sigma \in \mathcal{K}\}$.*

Ob tako definiranih geometričnih realizacijah lahko le z definicijo pravil, katera oglišča razpenjajo simplekse, do homeomorfizma natančno določimo polieder.

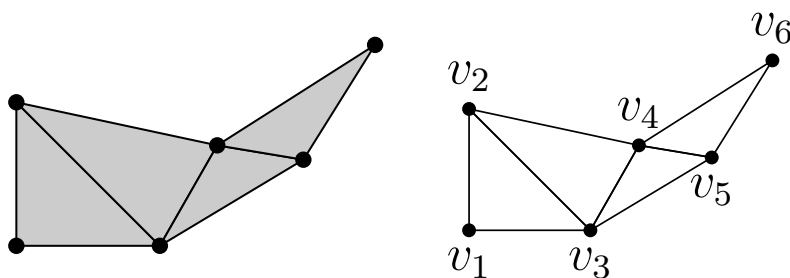
Primer 3.22 *Primeri abstraktnih kompleksov, ki so ogliščne sheme primerov 3.13. Velja, da so poliedri abstraktnih kompleksov homeomorfni poliedrom evklidskih kompleksov.*

1. *Družina vseh nepraznih podmnožic množice $\{0, 1, \dots, n\}$ je abstraktni kompleks, katerega polieder je homeomorfen \mathbb{B}^n .*
2. *Družina vseh pravih nepraznih podmnožic množice $\{0, 1, \dots, n\}$ je abstraktni kompleks, katerega polieder je homeomorfen \mathbb{S}^{n-1} .*
3. *\mathcal{K}_∞ je abstraktni kompleks, ki ima za 0-simplekse enojce $\{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ ter za 1-simplekse pare $\{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{Z}\}$, polieder je homeomorfen \mathbb{R} .*
4. *Za $m \in \mathbb{N}$ in $m \geq 3$ je \mathcal{K}_m abstraktni kompleks, ki ima za 0-simplekse enojce $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$ ter za 1-simplekse pare $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{m-1, m\}, \{m, 1\}\}$, polieder je homeomorfen \mathbb{S}^1 .*

Topološkemu prostoru X , ki je homeomorfen geometrični realizaciji nekega simplicialnega kompleksa, pravimo **polieder**. Simplicialnemu kompleksu \mathcal{K} pa pravimo triangulacija.

Prirejeni graf

Definiramo graf kot 1-razsežni polieder dane triangulacije (simplicialnega kompleksa) K . Vozlišča grafa so 0-simpleksi, povezave pa 1-simpleksi K . Tak graf je enostaven, saj je med vsakim parom vozlišč največ ena povezava, posamezno vozlišče pa ni nikoli povezano samo s sabo.



Slika 3.6: Simplicialni kompleks in prirejeni graf

Podgraf grafa G je polieder 1-razsežnega podkompleksa. Graf G je končen, če je končen njegov prirejeni kompleks.

3.4 Triangulacija

Izrek 3.23 (Triangulacijski izrek za 1-mnogoterosti.) Vsako 1-mnogoterost M lahko trianguliramo z 1-razsežnim simplicialnim kompleksom.

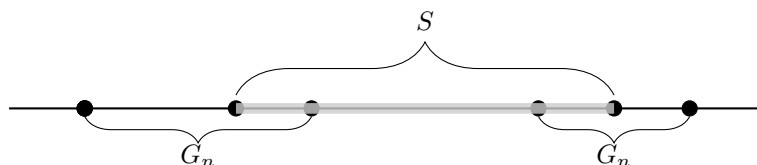
Dokaz. Poiskati želimo simplicialni kompleks \mathcal{K} , ki ima polieder $|\mathcal{K}|$ homeomorfen M . Pomagali si bomo z zaporedjem kompaktnih podprostorov $G_n \subset M$ za $n = 1, 2, \dots$, katerih unija je cel M in za katere velja:

- (i) vsak G_n je končen graf;
- (ii) G_n je podgraf G_{n+1} za vsak n ;
- (iii) za vsak n obstaja $m > n$, tako da $G_n \subset \text{Int}(G_m)$.

Ker je M 1-mnogoterost, obstaja števno pokritje za M iz odprtih 1-razsežnih evklidskih krogel $\{B_i\}$. Zaprtje vsake krogle $\overline{B_i}$ je po trditvi 3.11 homeomorfno 1-simpleksu. Ker je notranjost zaprte krogle $\text{Int}(\overline{B_i})$ enaka notranjosti $\overline{B_i}$ kot simpleks, je $\overline{B_i}$ 1-simpleks v M z notranjostjo B_i in oglišči $\overline{B_i} \setminus B_i$.

Naj bo G_1 graf 1-simpleksa $\overline{B_1}$ skupaj z oglišči. Vzemimo $n > 1$ ter predpostavimo, da že imamo zaporedje končnih grafov $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n$, ki zadoščajo pogoju i in ii ter $G_n = \overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \dots \cup \overline{B_n}$.

Nekatera izmed oglišč G_n lahko ležijo v notranjosti $\overline{B_{n+1}}$; tista, ki ležijo, določajo subdivizijo grafa $\overline{B_{n+1}}$ na končen graf S tako, da nobeno oglišče grafa G_n ne leži v notranjosti kakšnega roba grafa S .



Pokazali bomo, da lahko za graf G_{n+1} izberemo $G_n \cup S$.

Rob e iz S bodisi seka robove grafa G_n le v ogliščih ali pa je v celoti vsebovan v nekem robu e' grafa G_n . Če ima e notranjo točko $p \in \text{Int}(e)$, ki leži na nekem robu e' iz G_n , potem velja $p \in \text{Int}(e) \cap \text{Int}(e')$ (ker je S subdivizija z lastnostjo, da oglišče roba e' ne leži v notranjosti roba e). Presek $\text{Int}(e) \cap \text{Int}(e')$ je odprt v $\text{Int}(e)$ in je enak $\text{Int}(e) \cap e'$. Ker pa je e' kompakten podprostor v Hausdorffovem prostoru M , je e' zaprt v M , torej je presek $\text{Int}(e) \cap e'$ tudi zaprt v $\text{Int}(e)$. Ker je $\text{Int}(e)$ povezan, presek $\text{Int}(e) \cap e'$ pa hkrati odprt in zaprt, velja $\text{Int}(e) \cap e' = \text{Int}(e)$, torej je e v celoti vsebovan v e' .

Iz grafa S pobrišemo vse take robove e , ki so že vsebovani v grafu G_n , in izberemo $G_{n+1} = G_n \cup S$. Pokažimo, da G_{n+1} ustreza pogoju (i) in (ii). Robovi S sekajo robove G_n le v ogliščih, lahko pa se zgodi, da nek rob e iz S seka rob e' iz G_n v obeh ogliščih.

Tak rob e razdelimo na dva dela z ogliščem v notranjosti (na sliki) ter tako poskrbimo, da vsak rob e iz S seka nek rob e' iz G_n v največ enem oglišču.

Ker G_{n+1} sestavlja le končno mnogo simpleksov, je topologija G_{n+1} usklajena s topologijo simpleksov. G_{n+1} je končen graf s poliedrom $\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \dots \cup \overline{B_{n+1}}$, ki vsebuje G_n kot podgraf. Dobimo zaporedje grafov $\{G_n\}_n$. Ker je unija G_n enaka M , za vsako točko iz M velja, da je vsebovana v nekem G_n za dovolj velik n . Ker je $\{B_i\}$ števno pokritje za M , gotovo obstaja nek $m > n$, da je kompakten G_n pokrit z $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$, kar izpolnjuje pogoj (iii), ker je $G_n \subset \text{Int}(G_m)$.

\mathcal{K} naj bo (abstraktni) simplicialni kompleks, katerega oglišča so unija oglišč G_n za vse n , 1-simpleksi pa so pari oglišč $\{v, v'\}$, ki v nekem G_n razpenjajo rob. Preslikavi $h : |\mathcal{K}| \rightarrow M$, ki vsak 1-simpleks iz \mathcal{K} homeomorfno preslika v pripadajoči rob iz M , je bijekcija. Če je h tudi zaprta preslikava, je homeomorfizem.

Ker ima $|\mathcal{K}|$ topologijo usklajeno s simpleksi, je množica $F \subset |\mathcal{K}|$ zaprta natanko tedaj, ko je presek $F \cap |\sigma|$ zaprt v vsakem simpleksu $|\sigma| \in |\mathcal{K}|$. Ker je h nad simpleksi homeomorfizem, je slika $h(F \cap |\sigma|)$ zaprta v $h(|\sigma|)$. Če pokažemo, da je topologija M usklajena s topologijo simpleksov, sledi, da je F zaprta v M ter h homeomorfizem.

Za množico $A \subset M$, ki je zaprta v M , so preseki $A \cap \sigma$ zaprti v σ , saj imajo simpleksi topologijo podprostora M . Obratno, naj bo $B \subset M$ množica, ki ima zaprt presek z vsakim izmed simpleksov. Če je $x \in M$ mejna točka za B , izberemo dovolj velik n , da je $x \in \text{Int}(G_n)$ (torej $B \subset \text{Int}(G_n)$). Ker je presek B z vsakim izmed končno mnogo simpleksov iz G_n zaprt v G_n , G_n pa zaprt v M , sledi, da je $B \cap \text{Int}(G_n)$ zaprt v $\text{Int}(G_n)$. Ker je $x \in B$, velja, da je B zaprt v M , torej ima M usklajeno topologijo s simpleksi. \square

Izrek 3.24 (Triangulacijski izrek za 2-mnogoterosti.) *Vsako 2-mnogoterost lahko trianguliramo z 2-razsežnim simplicialnim kompleksom, v katerem vsak rok leži na natanko dveh 2-simpleksih.*

Dokaz za kompaktne 2-mnogoterosti najdemo v [7].

3.5 Orientacija

Möbiusov trak (razdelek 2.3) je primer kompaktne povezane 2-mnogoterosti z robom. Za Möbiusov trak pravimo, da je neorientabilen, saj ima za razliko od navadnega traku eno samo stran. Z uporabo simplicialnih kompleksov lahko pojem neorientabilnosti natančneje definiramo. Namesto da izberemo, katera stran trikotnika (2-simpleksa) v triangulaciji je zgornja, bomo izbrali orientacijo njegovih oglišč.

Pojem orientacije lahko razširimo na simplicialne komplekse poljubnih dimenzij, v našem primeru pa se omejimo na 2-razsežne simplicialne komplekse. Orientacija 1-simpleksa je izbira njegovega začetnega in končnega oglišča. Orientacija 2-simpleksa je izbira smeri rotacije.



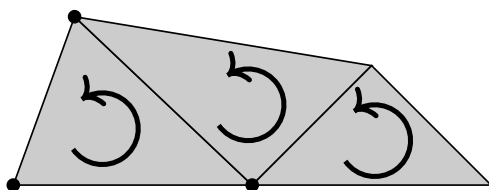
Slika 3.7: Orientacija 2-simpleksa

Če je σ orientiran 2-simpleks, njegova orientacija določa orientacije vseh njegovih mejnih lic, pravimo ji **inducirana orientacija**.



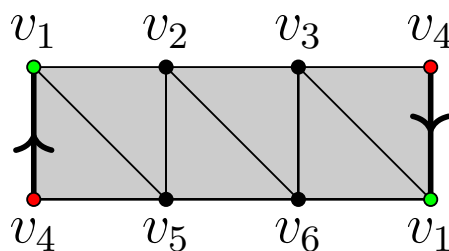
Slika 3.8: Inducirana orientacija

Naj bo sedaj K nek 2-razsežen simplicialni kompleks, v katerem je vsak 1-simpleks τ lice natanko dveh 2-simpleksov σ in σ' . Pravimo, da sta orientaciji simpleksov σ in σ' usklajeni, če inducirata nasprotno orientacijo nad τ . Orientacija simplicialnega kompleksa K je izbira orientacije vsakega k -simpleksa tako, da sta para, ki si delita 1-simpleks, usklajeno orientirana. Če obstaja taka orientacija za simplicialni kompleks K , rečemo, da je **orientabilen** (slika 3.9).



Slika 3.9: Orientabilen 2-razsežni simplicialni kompleks

Triangulacija Möbiusovega traku s slike 3.10 ni orientabilna. Z orientacijo trikotnika (2-simpleksa) $v_5v_1v_4$ je določena usklajena orientacija vseh ostalih trikotnikov. Trikotnika $v_5v_1v_4$ ter $v_1v_4v_3$ določata enako orientacijo na skupnem robu v_1v_4 , zato ta simplicialni kompleks ni orientabilen.



Slika 3.10: Triangulacija Möbiusovega traku

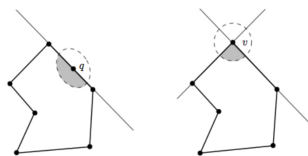
Poglavje 4

Klasifikacija ploskev

4.1 Predstavitev ploskev

Definicija 4.1 *Poligonska regija* P je kompaktna podmnožica ravnine \mathbb{R}^2 , katere meja je končen 1-razsežni evklidski simplicialni kompleks K , ki zadošča pogojem:

- (i) vsaka notranja točka q iz roba ima tako odprto okolico U v \mathbb{R}^2 , da je $P \cap U$ enak preseku U z zaprto polravnino;
- (ii) vsako oglišče v ima tako odprto okolico $V \subset \mathbb{R}^2$, da je $P \cap V$ enak preseku V z dvema zaprtima polravninama, katerih meji se sekata v točki v .



Slika 4.1: Okolici robne točke in oglišča v poligonski regiji

Končna družina disjunktih mnogokotnikov v ravnini je primer poligonske regije, saj je kompaktna in omejena s končno mnogo 1-simpleksi, ki zadoščajo pogojem iz definicije.

Trditev 4.2 Naj bo P končna disjunktna unija mnogokotnikov, da je vsota števila stranic mnogokotnikov soda. $S \sim$ označimo ekvivalenčno relacijo, ki robove paroma identificira z linearnim homeomorfizmom. Kvocienčni prostor $M = P/\sim$ je kompaktna 2-mnogoterost.

Pri dokazu 2-števnosti M bomo uporabili sledečo lemo.

Lema 4.3 Naj bo X 2-števen prostor ter $q : X \rightarrow M$ kvocienčna preslikava. Če je M lokalno evklidski (definicija 3.1), je tudi 2-števen.

Dokaz. Ker je M lokalno evklidski, obstaja pokritje $\{U \mid U \in \mathcal{U}\}$ za M , da je vsak U homeomorfen evklidski krogli. Družina $\{q^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ je odprto pokritje za X , ki ima zaradi 2-števnosti prostora X števno podpokritje \mathcal{U}_X . Obstaja torej števna podmnožica $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ pokritja za M , tako da je $\mathcal{U}_X = \{q^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}'\}$. Ker je \mathcal{U}_X števno pokritje za X , je \mathcal{U}' števno pokritje za M iz množic homeomorfnih evklidskim kroglam. Ker ima vsaka evklidska kroglja števno bazo okolic, ima števno bazo okolic tudi vsak $U \in \mathcal{U}'$, unija takih okolic je števna baza za M . \square

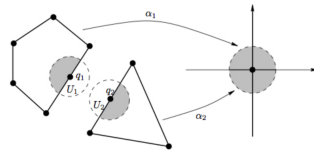
Dokaz. (Trditev 4.2) Naj bo $q : P \rightarrow M$ kvocienčna preslikava. Kvocienčni prostor M je zvezna slika kompaktnega prostora P , torej je kompakten prostor ter po lemi 4.3 tudi 2-števen. Točke kvocientnega prostora $p \in M$ spadajo v tri razrede:

- (i) notranje točke, katerih praslika je v notranjosti P ;
- (ii) robne točke, katerih praslika leži v notranjosti robov iz P ;
- (iii) ogliščne točke, katerih praslika so oglišča iz P .

Poiščimo evklidske okolice za točke iz vsakega razreda posebej.

Notranje točke. Preslikava q slika $Int(P)$ v M bijektivno, $Int(P)$ je tako nasičena odprta množica ter zato odprta v M . $q(Int(P))$ je evklidska okolica vsake notranje točke iz M .

Robne točke. Robna točka $r \in M$ ima natanko dve prasliki $q^{-1}(r) = \{r_1, r_2\} \subset P$, ki ležita vsaka v svojem robu. Robova se v kvocientu identificirata. Po definiciji 4.1 za notranji robni točki r_1 in r_2 obstajata disjunktni odprti okolici U_1 in U_2 , za kateri sta preseka $\overline{U_1} \cap P$ ter $\overline{U_2} \cap P$ zaprta poldiska v ravnini.



Slika 4.2: Točki r_1 in r_2 z okolicama

Označimo z $V_1 = P \cap U_1$ in $V_2 = P \cap U_2$ notranjosti poldiskov s pripadajočim delom roba. V_1 lahko z afinim homeomorfizmom α_1 premaknemo v poldisk na zgornji polravnini, podobno lahko z afinim homeomorfizmom α_2 premaknemo V_2 v poldisk na spodnji polravnini, točki r_1 in r_2 pa slikamo v izhodišče. V_1 in V_2 prej zožimo tako, da se vse točke v $V_1 \cap Meja(P)$ pravilno identificirajo s točkami $V_2 \cap Meja(P)$. Z zožitvijo zagotovimo, da je $V_1 \cup V_2$ nasičena množica v P .

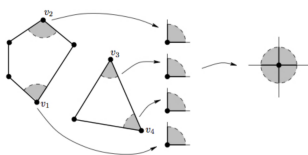
Ker je $V_1 \cup V_2$ nasičena v P , je $q(V_1 \cup V_2)$ odprta v M . Iz $r_1, r_2 \in V_1 \cup V_2$ sledi, da je $r \in q(V_1 \cup V_2)$, torej je tudi odprta okolica za r .

Naj bo $\alpha : V_1 \cup V_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preslikava, za katero velja $\alpha|_{V_1} = \alpha_1$ in $\alpha|_{V_2} = \alpha_2$. Slika množice $V_1 \cup V_2$ s preslikavo α je odprta množica v \mathbb{R}^2 . Preslikava α je kvocientna in naredi iste identifikacije kot zožitev kvocientna preslikave $q|_{V_1 \cup V_2}$, zato inducira homeomorfizem $\bar{\alpha}$ med prostoroma $q(V_1 \cup V_2)$ in $\alpha(V_1 \cup V_2)$.

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 \cup V_2 & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(V_1 \cup V_2) \\
 q|_{V_1 \cup V_2} \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \\
 q(V_1 \cup V_2) & &
 \end{array}$$

S tem smo pokazali, da je odprta okolica $q(V_1 \cup V_2)$ homeomorfna odprti množici $\alpha(V_1 \cup V_2)$ v \mathbb{R}^2 , torej je $q(V_1 \cup V_2)$ evklidska okolica za r .

Ogliščne točke. Oglišče $v \in M$ ima za prasliko končno množico $q^{-1}(v) = \{v_1, \dots, v_k\} \subset P$. Okolice točke v_i ima po definiciji 4.1 obliko krožnega izseka, ki je na izseku krožnice odprt. Za vsak $i = 1, \dots, k$ poiščemo homeomorfizem β_i med okolico točke v_i ter krožnim izsekom s središčnim kotom $2\pi/k$ v ravnini, ki ima v polarnih koordinatah točke $\{(r, \phi) \mid \phi_0 \leq \phi \leq \phi_0 + 2\pi/k\}$. Robovi, na katerih ležijo oglišča v_i za $i = 1, \dots, k$, se paroma identificirajo, zato lahko krožne izseke zlepimo v krožnico. Pri tem moramo paziti, da se točke na robovih pravilno identificirajo. Podobno kot pri ogliščnih točkah sestavimo kvocientno preslikavo β , ki slika unijo okolice v_i za $i = 1, \dots, k$ v odprto podmnožico \mathbb{R}^2 ter naredi iste identifikacije kot zožitev kvocientne preslikave q .



Slika 4.3: Okolice točk v_1, \dots, v_k

□

Velja tudi, da lahko vsako kompaktno ploskev brez roba predstavimo kot kvocientni prostor družine mnogokotnikov s paroma identificiranimi stranici. To bomo pokazali v nadaljevanju.

Predstavitev z besedo. Za dokaz klasifikacijskega izreka potrebujemo enostaven način za predstavitev ploskev. Ploskev bomo predstavili kot kvocientni prostor končne unije mnogokotnikov s sodim številom vseh robov, v kateri se robovi paroma identificirajo. Primeri predstavitev z besedo so podani v razdelku 2.3. Recimo, da ima družina mnogokotnikov S skupaj $2n$ robov. Robove označimo s simboli a_1, \dots, a_n , kjer sta z istim simbolom označena robova, ki se identificirata. Smer identifikacije robov po potrebi označimo še s simbolom $^{-1}$ (glej razdelek 2.3).

Definicija 4.4 *Predstavitev z besedo \mathcal{P} je množica besed $\{W_1, \dots, W_k\}$, kjer vsaka beseda predstavlja mnogokotnik iz disjunktne unije.*

Geometrična realizacija predstavitve z besedo \mathcal{P} je kvocientni prostor disjunktne unije mnogokotnikov s paroma identificiranimi stranicami. Vsaki besedi $W_i \in \mathcal{P}$ priredimo konveksni n -strani mnogokotnik, kjer je n dolžina besede W_i . Kvocientni prostor, v katerem se stranice mnogokotnikov identificirajo z linearnimi homeomorfizmi, je geometrična realizacija $|\mathcal{P}|$.

Izrek 4.5 *Za vsako kompaktno ploskev M obstaja predstavitev z besedo.*

Dokaz. Po triangulacijskem izreku 3.24 je M homeomorfna poliedru 2-razsežnega simplicialnega kompleksa \mathcal{K} , v katerem je vsak 1-simpleks lice natanko dveh 2-simpleksov. Iz simplicialnega kompleksa \mathcal{K} konstuiramo predstavitev z besedo \mathcal{P} tako, da vsak 2-simpleks predstavimo z besedo dolžine 3, vsak 1-simpleks pa označimo z istim simbolom v obeh predstavitev 2-simpleksov.

Pokazali bomo, da je geometrična realizacija take predstavitve z besedo $|\mathcal{P}|$ homeomorfna poliedru $|\mathcal{K}|$, ki je homeomorfen kompaktni ploskvi M . Če pokažemo, da naredita kvocientni preslikavi $q_{\mathcal{K}} : \mathcal{P} \rightarrow |\mathcal{K}|$ ter $q_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow |\mathcal{P}|$ iste identifikacije, bo obstoj homeomorfizma med $|\mathcal{K}|$ in $|\mathcal{P}|$ direktna posledica.

Iz konstrukcije predstavitve z besedo \mathcal{P} je jasno, da naredita kvocientni preslikavi iste identifikacije robov.

Za dokaz identifikacije oglišč izberimo poljubno oglišče $v \in \mathcal{K}$. v je gotovo oglišče nekega 1-simpleksa. Po izreku 3.24 je ta 1-simpleks lice natanko dveh 2-simpleksov, označimo ju z σ in σ' . Naj bo \sim ekvivalenčna relacija, za katero velja $\sigma \sim \sigma'$ za $\sigma, \sigma' \in \mathcal{K}$ natanko tedaj, ko oba vsebujeta oglišče v ter obstaja zaporedje 2-simpleksov $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n = \sigma'$ iz \mathcal{K} , v katerem imata zaporedna simpleksa σ_i in σ_{i+1} za $i = 1, \dots, n-1$ skupni 1-simpleks. Če obstaja en sam ekvivalenčni razred za v , se identifikaciji oglišč ujemata.

Predpostavimo, da je ekvivalenčnih razredov več in izberimo poljubna razreda $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ in $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$. Izberimo odprto evklidsko okolico $U \subset |K|$

za v dovolj majhno, da seka le 1-simplekse, ki v vsebujejo. U je homeomorfna \mathbb{R}^2 , zato je $U \setminus \{v\}$ povezana. $(U \setminus \{v\}) \cap \{\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_n\}$ in $(U \setminus \{v\}) \cap \{\tau_1 \cup \dots \cup \tau_n\}$ sta disjunktni, odprti množici v $|\mathcal{K}|$, ki tvorita separacijo za $U \setminus \{v\}$. Ker je $U \setminus \{v\}$ povezana, je to protislovje, torej je ekvivalenčni razred le en sam.

Kvocienčni preslikavi $q_{\mathcal{K}}$ in $q_{\mathcal{P}}$ naredita isti identifikaciji robov in oglišč, torej sta kvocienčna prostora $|\mathcal{K}| \cong M$ in $|\mathcal{P}|$ homeomorfna. \square

Definicija 4.6 *Elementarne transformacije nad poliedersko predstavitevjo ploskve:*

- (i) *Subdivizija:* vsako pojavitev simbola a zamenjamo z ae , a^{-1} pa z $(ae)^{-1} = e^{-1}a^{-1}$;
- (ii) *Refleksija:* $a_1 \dots a_m \mapsto a_m^{-1} \dots a_1^{-1}$;
- (iii) *Rotacija:* $a_1 \dots a_m \mapsto a_2 \dots a_m$;
- (iv) *Rez:* $W \mapsto \{W_1e, e^{-1}W_2\}$. Če je beseda W oblike W_1W_2 , kjer sta W_1 in W_2 besedi dolžine vsaj 2, jo lahko predstavimo kot besedi: W_1e in $e^{-1}W_2$;
- (v) *Zlepek:* $\{W_1e, e^{-1}W_2\} \mapsto W_1W_2$. Besedi W_1 in W_2 zlepimo skupaj po identificiranem robu. W_1 in W_2 morata imeti dolžino vsaj 2;
- (vi) *Pregib:* $Wee^{-1} \mapsto W$;
- (vii) *Razgrnitev:* $W \mapsto Wee^{-1}$.

Trditev 4.7 *Elementarne transformacije ohranjajo topološko ekvivalentne predstavitve.*

Pri dokazu za nekatere transformacije si bomo pomagali z naslednjo lemo.

Lema 4.8 *Naj bosta P_1 in P_2 konveksna mnogokotnika z istim številom robov ter $f : \text{Meja}(P_1) \rightarrow \text{Meja}(P_2)$ simplicialni homeomorfizen. Obstaja homeomorfizem $F : P_1 \rightarrow P_2$, ki je razširitev f .*

Dokaz. Izberemo poljubni točki $p_1 \in \text{Int}(P_1)$ ter $p_2 \in \text{Int}(P_2)$. Zaradi konveksnosti P_1 daljica med p_1 in poljubnim ogliščem v celoti leži v P_1 . Oglišča in robovi P_1 skupaj s točko p_1 , daljicami med p_1 in oglišči P_1 ter trikotniki, ki z dodanimi daljicami nastanejo, oblikujejo nov simplicialni kompleks s poliedrom P_1 . Enako velja za $p_2 \in P_2$.

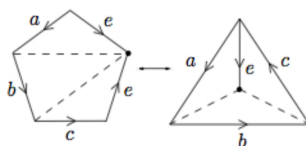
Naj bo $F : P_1 \rightarrow P_2$ simplicialna preslikava med kompleksoma, ki p_1 slika v p_2 . F je homeomorfizem, katerega zožitev na $\text{Meja}(P_1)$ se ujema z f .

□

Dokaz. (Trditev 4.7) **Refleksija in rotacija:** besedi $a_1 \dots a_m$ ter $a_m^{-1} \dots a_1^{-1}$ predstavimo z mnogokotnikoma. Refleksija in rotacija sta linearni transformaciji, ki ju lahko zapišemo z matriko. Sta bijektivni in zvezni, torej sta homeomorfizma.

Rez: Naj bo P_1 mnogokotnik, ki ustreza besedi $W_1 e$, P_2 mnogokotnik besede $e^{-1} W_2$ ter P' mnogokotnik besede $W_1 W_2$. $q : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow S$ ter $q' : P' \rightarrow S'$ naj bosta pripadajoči kvocientni preslikavi. Daljica med končnim in začetnim ogliščem W_1 v P' v celoti leži v P' , ker je P' konveksen. Preslikava $f : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow P'$, ki vsak rob iz P_1 in P_2 identificira z robom v P' ter e iz P_1 in e^{-1} iz P_2 identificira z e iz P' je zvezna. Po lemi 4.8 obstajata razširitvi F_1 in F_2 za zožitvi $f|_{P_1}$ in $f|_{P_2}$, ki sta homeomorfizma. Naj bo $F : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow P'$ zvezna preslikava, za katero velja $F|_{P_1} = F_1$ ter $F|_{P_2} = F_2$. F je kvocientna preslikava. Kvocientni preslikavi $q' \circ F : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow S'$ in $q : P' \rightarrow S$ naredita iste identifikacije, zato sta S in S' homeomorfna.

Pregib: Če ima W dolžino 2, jo lahko s subdivizijo najprej podaljšamo, naredimo pregib ter jo zopet skrajšamo na začetno dolžino. Predpostavimo, da ima W dolžino vsaj 3.



Slika 4.4: Pregib

Naj bo $W = abc$. Označimo s P mnogokotnik, označen z $abcee^{-1}$, ter z P' mnogokotnik, označen z abc , $q : P \rightarrow S$ in $q' : P' \rightarrow S'$ pa naj bosta pripadajoči kvocientni preslikavi. Dokazujemo, da sta S in S' homeomorfna.

Mnogokotnika P in P' preoblikujemo do simplicialnega kompleksa, kot je prikazano na sliki 4.4. Besede, ki predstavljajo tak simplicialni kompleks, so $e^{-1}ad$, $d^{-1}bf$ ter $f^{-1}ce$. Naj bo $f : P \rightarrow P'$ simplicialna preslikava, ki robove iz P preslika v enako označene robove iz P' . Preslikavi $q' \circ f$ in q sta kvocientni ter naredita iste identifikacije, zato sta kvocientna prostora S in S' homeomorfna.

Če ima W dolžino 4 ali več, je oblike $W = Xbc$ za neko besedo X , dolžine vsaj 2. Z uporabo transformacije rez dobimo:

$$Xbcee^{-1} \cong \{Xa^{-1}, abcee^{-1}\}$$

ter nadaljujemo kot pri $W = abc$. □

Trditev 4.9 Vsako povezano ploskev M lahko predstavimo z eno samo besedo.

Dokaz. Naj ima M predstavitev W_1, \dots, W_k . Ker je povezan, za vsako besedo W_i gotovo obstaja rob, ki se identificira z robom iz neke druge besede W_j . Če to ne drži ter obstaja taka beseda W_i , znotraj katere se vsi robovi paroma identificirajo, je M disjunktna unija kvocientov vsaj dveh mnogokotnikov, od katerih je eden prirejen besedi W_i . Tak mnogokotnik je v kvocientu hkrati odprt in zaprt, torej tvori separacijo za M . Ker je M povezan, je to protislovje.

Z elementarno transformacijo zlepek (kombinirano z rotacijo in refleksijo), lahko predstavitev W_1, \dots, W_k preoblikujemo do predstavitve z eno besedo W . □

Trditev 4.10 Naj bosta M_1 in M_2 disjunktni kompaktni ploskvi s predstavitvama W_1 in W_2 . Potem je W_1W_2 predstavitev za $M_1 \# M_2$.

Komentar: Predstavitev $\{W_1c^{-1}b^{-1}a^{-1}, abc\}$ lahko z elementarnimi transformacijami preoblikujemo do besede W_1 . Pokažemo, da je notranjost trikotnika abc v M_1 homeomorfna disku B_1 . Sledi, da je $W_1c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ predstavitev za $M'_1 = M_1 \setminus B_1$ in ∂B_1 slika stranic $c^{-1}b^{-1}a^{-1}$. Podobno pokažemo, da je $abcW_2$ predstavitev za $M'_2 = M_2 \setminus B_2$. Sledi, da je $\{W_1c^{-1}b^{-1}a^{-1}, abcW_2\}$ predstavitev za $M'_1 \sqcup M'_2$ z identificiranim robom izrezanega diska, torej je W_1W_2 predstavitev za $M_1 \# M_2$. Dokaz lahko najdemo v [5].

4.2 Klasifikacija krivulj in kompaktnih ploškev

Izrek 4.11 (Klasifikacija 1-mnogoterosti.) *Naj bo M povezana 1-mnogoterost. Če je M kompaktna, je homeomorfna \mathbb{S}^1 , če ni, je homeomorfna \mathbb{R} .*

Pri dokazu bomo uporabili sledečo lemo.

Lema 4.12 *Naj bo \mathcal{K} simplicialni kompleks s poliedrom $|\mathcal{K}|$, ki je 1-mnogoterost. Velja, da vsako oglišče \mathcal{K} leži na natanko dveh robovih iz \mathcal{K} .*

Dokaz. Naj bo v oglišče iz \mathcal{K} ter V unija oglišča v ter notranjosti vseh robov, ki imajo v za eno izmed oglišč. Presek $V \cap \sigma$ je odprt v vsakem simpleksu $\sigma \in \mathcal{K}$, torej je V odprt tudi v $|\mathcal{K}|$. Ker je polieder $|\mathcal{K}|$ 1-mnogoterost, ima v evklidsko okolico $U \subset V$ homeomorfno odprtemu intervalu J . $U \setminus \{v\}$ ima zato natanko dve povezani komponenti. Za vsak rob e , ki ima v za oglišče, je presek $Int(e) \cap (U \setminus \{v\})$ odprt v $U \setminus \{v\}$. Vsi taki preseki so paroma disjunktne (saj imajo robovi paroma disjunktne notranjosti) in neprazni. Če v leži na več kot dveh robovih, imamo separacijo za $U \setminus \{v\}$ na več kot dve komponenti (vsak presek $Int(e) \cap (U \setminus \{v\})$ je svoja komponenta), kar pa ni mogoče, saj ima $U \setminus \{v\}$ lahko največ dve komponenti. Vsako oglišče v tako leži na največ dveh robovih.

Pokažimo še, da oglišče v leži na natanko dveh robovih. Če v leži na enem samem robu e , ima po zgornji konstrukciji okolico $U \subset V = Int(e) \cup \{v\}$,

ki je v celoti vsebovana v e . Okolica U očitno ni homeomorfna odprtemu intervalu.

Obstaja tudi odprta okolica $Y \subset U$ za v , tako da je $Y \setminus \{v\}$ povezana; za Y lahko vzamemo sliko intervala $[0, \epsilon)$ s homeomorfizmom $\phi : [0, 1] \rightarrow e$, ki slika 0 v v . Po drugi strani pa je vsaka evklidska okolica brez točke nepovezana, torej oglišče v , ki bi bilo vsebovano v enem samem robu, ne obstaja. \square

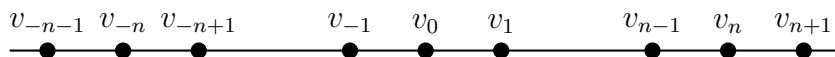
Dokaz. (Izrek 4.11) Po triangulacijskem izreku 3.23 in lemi 4.12 je M homeomorfna grafu G , v katerem vsako oglišče leži na natanko dveh robovih. Naj bo \mathcal{K} simplicialni kompleks, prirejen grafu G .

Če je \mathcal{K} izomorfen kateremu izmed naslednjih kompleksov:

- (a) \mathcal{K}_∞ je abstraktni kompleks, ki ima za 0-simplekse enojce $\{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ ter za 1-simplekse pare $\{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{Z}\}$, njegov polieder je homeomorfen \mathbb{R} ;
- (b) za $m \in \mathbb{N}$ in $m \geq 3$ je \mathcal{K}_m abstraktni kompleks, ki ima za 0-simplekse enojce $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$ ter za 1-simplekse pare $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{m-1, m\}, \{m, 1\}\}$, njegov polieder je homeomorfen \mathbb{S}^1 ;

je M homeomorfen njegovemu poliedru.

Izberimo poljubno oglišče v_0 . Po lemi 4.12 v_0 leži na točno dveh robovih, torej ima dve sosednji oglišči – označimo ju z v_{-1} in v_1 . Za $n \geq 1$ izberemo vozlišče v_{n+1} tako, da velja $v_{n+1} \neq v_{n-1}$ ter obstaja rob, ki ima za krajišči v_n in v_{n+1} . Podobno vozlišče v_{-n-1} izberemo tako, da velja $v_{-n-1} \neq v_{-n+1}$ ter obstaja rob, ki ima za krajišči v_{-n} in v_{-n-1} .



Slika 4.5: Konstrukcija grafa G

Označimo z U unijo vseh robov $\langle v_n, v_{n+1} \rangle \subset M$.

Ker je topologija M usklajena s topologijo simpleksov, presek množice U z vsakim simpleksom pa je v simpleksu zaprt, je U zaprta množica v M .

Obenem pa je U v M tudi odprta, saj je vsak rob brez oglišč odprt v M (torej je v notranjosti U), vsako oglišče $v \in U$ pa ima odprto okolico, ki seka robova, vsebovana v U , torej je tudi v v notranjosti U . Ker je M povezana, sledi, da je $U = M$.

Obravnavamo dva primera:

- (I) Za vsak par različnih indeksov $i, j \in \mathbb{Z}$ velja $v_i \neq v_j$. Takrat preslikava $n \mapsto v_n$ določa izomorfizem med \mathcal{K}_∞ in \mathcal{K} , torej je M homeomorfna \mathbb{R} .
- (II) Za neka $i, m \in \mathbb{Z}$ in $m > 0$ velja $v_i = v_{i+m}$. Izberimo i in m tako, da je m najmanjše pozitivno število s to lastnostjo. Pokažemo, da je tedaj graf G cikel dolžine M , torej za vsak $j \in \mathbb{Z}$ velja $v_j = v_{j+m}$. To gotovo velja za $j = i$. Ker sta v_i in v_{i+m} isti oglišči, obstaja povezava med v_{i+1} ter v_{i+m} . Oglišče v_{i+1} je tako bodisi enako oglišču v_{i+m-1} ali v_{i+m+1} . Ker je m najmanjše tako pozitivno število, da velja $v_k = v_{k+m}$, oglišče v_{i+1} gotovo ni enako v_{i+m+1} , saj tako kršimo pogoj, da je m najmanjši tak (razdalja med njima je $(i+m-1) - (i+1) = m-2$). Velja torej $v_{i+1} = v_{i+m-1}$. Podobno dokažemo tudi za $j < i$. Preslikava $n \mapsto v_n$ določa izomorfizem med \mathcal{K}_m in \mathcal{K} , torej je M homeomorfen \mathbb{S}^1 .

□

Definicija 4.13 Par aa je **neorientabilen**, par aa^{-1} pa je **orientabilen**.

Definicija 4.14 Pravimo, da sta para a, a^{-1} in b, b^{-1} **prepletena**, če se v predstavitvi pojavita kot $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$.

Izrek 4.15 (Klasifikacija ploskev.) Poljubna kompaktna ploskev je homeomorfna eni izmed naslednjih:

- (i) sferi \mathbb{S}^2 ;
- (ii) končni povezani vsoti torusov $\mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}$;
- (iii) končni povezani vsoti projektivnih ravnin $\mathbb{P} \# \dots \# \mathbb{P}$.

Po lemi 4.9 lahko vsako kompaktno ploskev predstavimo z eno samo besedo. Označimo z W predstavitev za M . Z uporabo elementarnih transformacij bomo predstavitev za M preoblikovali do predstavitve za sfero, povezano vsoto torusov ali povezano vsoto projektivnih ravnin.

Lema 4.16 *Ploskev M je homeomorfna \mathbb{S}^1 ali pa obstaja predstavitev za M brez sosednjih orientabilnih parov.*

Dokaz. Če predstavitev W vsebuje sosednji orientabilni par, je oblike $W_1aa^{-1}W_2$ ali $W_1a^{-1}aW_2$ za besedi W_1 in W_2 . Če je dolžina W vsaj 3, lahko tak par izničimo z elementarno transformacijo pregib. Če pa je dolžina W enaka 2, je ekvivalentna predstavitvi sfere aa^{-1} ali $a^{-1}a$, torej je M homeomorfna sferi. \square

Lema 4.17 *Obstaja predstavitev za M , v kateri so vsi neorientabilni pari sosednji.*

Dokaz. Če obstaja neorientabilni par aa , ki ni sosednji, je predstavitev W oblike W_1aW_2a , kjer sta W_1 in W_2 besedi dolžine vsaj 1. Z zaporedjem elementarnih transformacij lahko predstavitev W preoblikujemo v $W_1W_2^{-1}bb$.

$$\begin{aligned} W_1aW_2a &\cong \{W_1ab, b^{-1}W_2a\} && \text{(rez)} \\ &\cong \{bW_1a, a^{-1}W_2^{-1}b\} && \text{(rotacija + refleksija)} \\ &\cong W_1W_2^{-1}bb && \text{(zlepek + rotacija)} \end{aligned}$$

Iz predstavitve smo odstranili simbol a ter dodali nov simbol b , ki tvori sosednji neorientabilni par. S podano transformacijo sosednjih orientabilnih parov v W_1 in W_2 gotovo nismo ločili, z refleksijo W_2 pa smo morebiti uvedli nove neorientabilne pare, ki niso sosednji. Ker transformacija ohranja že obstoječe sosednje neorientabilne pare, beseda W pa je končna, lahko s končnim številom ponovitev vse take pare preoblikujemo v sosednje. \square

Po končnem številu transformacij iz leme 4.17 dobimo predstavitev za M , v kateri so vsi neorientabilni pari sosednji. Vse sosednje orientabilne pare v predstavitvi pa izničimo z uporabo leme 4.16.

Lema 4.18 *Obstaja predstavitev za M , v kateri se vsa oglišča identificirajo v enega samega.*

Dokaz. Predstavitev za M najprej preoblikujemo v obliko, ki ustreza lemama 4.17 in 4.16.

Oglišča združimo v ekvivalenčne razrede glede na oglišče, v katerega se identificirajo ter izberemo poljuben ekvivalenčni razred $[v]$. Če je ekvivalenčnih razredov več, gotovo obstaja rob, ki povezuje oglišče $v \in [v]$ z ogliščem iz drugega ekvivalenčnega razreda $w \in [w]$; označimo tak rob z a . Ker v predstavitvi za M ni sosednjih orientabilnih parov, rob, ki se a dotika v oglišču v , gotovo ni označen z a^{-1} . Prav tako rob ni označen z a , saj bi se v kvocientu začetno oglišče v in končno oglišče w roba a identificirala, v in w pa po predpostavki ne ležita v istem ekvivalenčnem razredu. Označimo torej rob z b , njegovo drugo oglišče pa z x .

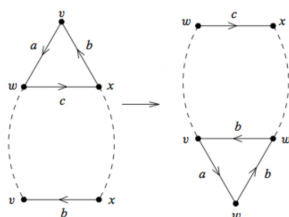
Ker so robovi v predstavitvi za M paroma identificirani, nekje v predstavitvi obstaja še natanko en rob označen z b ali b^{-1} . Predpostavimo najprej, da je rob označen z b^{-1} , dokaz za b je podoben.

Predstavitev za M je tako oblike $baW_1b^{-1}W_2$, za besedi W_1 in W_2 , od katerih je vsaj ena neprazna. Z uporabo elementarnih transformacij predstavitev preoblikujemo v $acW_2c^{-1}W_1$:

$$\begin{aligned} baW_1b^{-1}W_2 &\cong \{bac, c^{-1}W_1b^{-1}W_2\} && \text{(rez)} \\ &\cong \{acb, b^{-1}W_2c^{-1}W_1\} && \text{(rotacija)} \\ &\cong acW_2c^{-1}W_1 && \text{(zlepek)} \end{aligned}$$

Z lepljenjem po robu b smo zmanjšali število oglišč iz razreda $[v]$ za 1, število oglišč v razredu $[w]$ pa smo lahko le povečali.

Če smo z transformacijo uvedli sosednji orientabilni par, ga lahko z uporabo leme 4.16 odstranimo. S končnim številom transformacij lahko tako odstranimo vsa oglišča v razredu $[v]$. Proces ponavljamo, dokler ne ostane le en sam ekvivalenčni razred. \square



Slika 4.6: Transformacija predstavitve

Lema 4.19 Če je v predstavitvi M nek orientabilen par aa^{-1} , potem je gotovo še drugi orientabilen par b, b^{-1} , ki se s parom aa^{-1} pojavi v obliki $a, \dots, b, \dots, a^{-1}, \dots, b^{-1}$.

Dokaz. Predstavitev W za M preoblikujemo tako, da ustreza leмам 4.16, 4.17, 4.18. Z uporabo leme 4.16 smo vse sosednje orientabilne pare že izničili. Predpostavimo, da v W ni orientabilnega para, ki bi bil prepleten s parom aa^{-1} . Predstavitev W je tako oblike $aW_1a^{-1}W_2$ za neprazni besedi W_1 in W_2 , kjer W_1 vsebuje nesosednje orientabilne pare ter sosednje neorientabilne pare, vsi se identificirajo znotraj W_1 . Enako velja tudi za W_2 . Robova a in a^{-1} imata začetek v W_2 in konec v W_1 . Začetni oglišči a in a^{-1} se identificirata z ogliščem iz W_1 , končni pa z ogliščem iz W_2 , kar je v protislovju z lemo 4.18, da se vsa oglišča identificirajo v natanko eno oglišče. \square

Lema 4.20 Obstaja predstavitev W za M , v kateri se vsi prepleteni orientabilni pari pojavijo skupaj brez vmesnih robov: $aba^{-1}b^{-1}$.

Dokaz. Predstavitev W , ki vsebuje prepletena orientabilna para, je oblike $W_1aW_2bW_3a^{-1}W_4b^{-1}$. Z elementarnimi transformacijami lahko predstavitev preoblikujemo v $cdc^{-1}d^{-1}W_1W_4W_3W_2$.

$$\begin{aligned}
 W_1aW_2bW_3a^{-1}W_4b^{-1} &\cong W\{_1aW_2c, c^{-1}bW_3a^{-1}W_4b^{-1}\} && \text{(rez)} \\
 &\cong \{W_2cW_1a, a^{-1}W_4b^{-1}c^{-1}bW_3\} && \text{(rotacija)} \\
 &\cong W_2cW_1W_4b^{-1}c^{-1}bW_3 && \text{(zlepek)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong c^{-1}bW_3W_2cW_1W_4b^{-1} && \text{(rotacija)} \\
&\cong \{c^{-1}bW_3W_2cd, d^{-1}W_1W_4b^{-1}\} && \text{(rez)} \\
&\cong \{W_3W_2cdc^{-1}b, b^{-1}d^{-1}W_1W_4\} && \text{(rotacija)} \\
&\cong W_3W_2cdc^{-1}d^{-1}W_1W_4 && \text{(zlepek)} \\
&\cong cdc^{-1}d^{-1}W_1W_4W_3W_2 && \text{(rotacija)}
\end{aligned}$$

Pri transformaciji nismo uporabili refleksije, torej gotovo nismo uvedli novih prepletenih orientabilnih parov ali razdrli že obstoječih. S končnim številom ponovitev transformacije vse prepletene orientabilne pare preoblikujemo do zahtevane oblike. \square

Predstavitev za M , ki ustreza lemam, vsebuje sosednje neorientabilne pare ali prepletene orientabilne pare, ki se po lemi 4.20 pojavijo brez vmesnih robov. Taka predstavitev ustreza predstavitvi (mešane) povezane vsote torusov ($aba^{-1}b^{-1}$) in projektivnih ravnin (aa). Za dokaz izreka 4.15 je potrebno še pokazati, da je predstavitev za M ekvivalentna predstavitvi povezane vsote samih torusov ali samih projektivnih ravnin.

Trditev 4.21 *Kleinova steklenica \mathbb{K} je homeomorfna $\mathbb{P}\#\mathbb{P}$.*

Dokaz. Predstavitev Kleinove steklenice $abab^{-1}$ lahko preoblikujemo do $bbcc$ z uporabo elementarnih transformacij.

$$\begin{aligned}
abab^{-1} &\cong \{abc, c^{-1}ab^{-1}\} && \text{(rez)} \\
&\cong \{bca, b^{-1}c^{-1}a\} && \text{(rotacija)} \\
&\cong \{bca, a^{-1}cb\} && \text{(refleksija)} \\
&\cong bbcc && \text{(zlepek + rotacija)}
\end{aligned}$$

Beseda $bbcc$ ustreza predstavitvi vsote dveh projektivnih ravnin $\mathbb{P}\#\mathbb{P}$. \square

Lema 4.22 *Povezana vsota torusa in projektivne ravnine $\mathbb{T}\#\mathbb{P}$ je homeomorfna $\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$.*

Dokaz. Začnemo s predstavitvijo $abab^{-1}cc$ za $\mathbb{K}\#\mathbb{P}$, ki je po lemi 4.21 homeomorfna $\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$, ter jo z elementarnimi transformacijami preoblikujemo do $a^{-1}d^{-1}adee$.

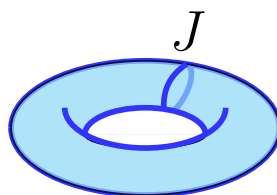
$$\begin{aligned}
abab^{-1}cc &\cong cabab^{-1}c && \text{(rotacija)} \\
&\cong \{cabd^{-1}, dab^{-1}c\} && \text{(rez)} \\
&\cong \{abd^{-1}c, c^{-1}ba^{-1}d^{-1}\} && \text{(rotacija + refleksija)} \\
&\cong a^{-1}d^{-1}abd^{-1}b && \text{(zlepek + rotacija)} \\
&\cong \{ea^{-1}d^{-1}ab, b^{-1}de\} && \text{(rotacija + refleksija)} \\
&\cong ea^{-1}d^{-1}ade && \text{(zlepek)} \\
&\cong a^{-1}d^{-1}adee && \text{(rotacija)}
\end{aligned}$$

Predstavitev $a^{-1}d^{-1}adee$ je predstavitev $\mathbb{T}\#\mathbb{P}$. □

Dokaz. (Izrek 4.15) Poljubno predstavitev kompaktne ploskve M lahko z uporabo lem preoblikujemo do predstavitev povezane vsote torusov in projektivnih ravnin. Če predstavitev vsebuje same sosednje neorientabilne pare, je ploskev M homeomorfna vsoti projektivnih ravnin $\mathbb{P}\#\dots\#\mathbb{P}$, če predstavitev vsebuje same prepletene orientabilne pare, je homeomorfna povezani vsoti torusov $\mathbb{T}\#\dots\#\mathbb{T}$. Če predstavitev vsebuje tako sosednje neorientabilne pare kot tudi prepletene orientabilne pare, je oblike $aabcb^{-1}c^{-1}W_1$ ali $bc b^{-1}c^{-1}aaW_1$. V obeh primerih gre za povezano vsoto $\mathbb{T}\#\mathbb{P}$, ki je po lemi 4.22 homeomorfna $\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$. Predstavitev tako preoblikujemo do povezane vsote samih projektivnih ravnin. □

Trditev 4.23 *Sfera \mathbb{S}^2 ni homeomorfna povezani vsoti torusov.*

Dokaz. Predpostavimo, da obstaja homeomorfizem $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^2$. Iz torusa odstranimo topološko krožnico J , kot je prikazano na sliki 4.7. Sferični Jordanov izrek (stran 102 v [2]) pove, da ima $\mathbb{S}^2 \setminus h(J)$ natanko dve komponenti, medtem ko ima $\mathbb{T} \setminus J$ samo eno. Dokaz za povezano vsoto torusov je enak. □

Slika 4.7: Torus in izrezana krožnica J

4.3 Orientabilnost

Vsako kompaktno ploskev M lahko trianguliramo z 2-razsežnim simplicialnim kompleksom. Naj bo \mathcal{P} predstavitev z besedo, prirejena takemu simplicialnemu kompleksu. Vsaka beseda iz \mathcal{P} ima dolžino 3 in določa orientacijo pripadajočega 2-simpleksa, kot smo jo definirali v razdelku 3.5. Enostavno lahko preverimo, da imata dva 2-simpleksa, ki se identificirata po robu, usklajeno orientacijo natanko tedaj, ko sta robova označena kot orientabilen par – njuna simbola sta a in a^{-1} .

Predstavitev ploskve \mathcal{P} je orientirana, če ne vsebuje nobenih **neorientabilnih** parov (aa, bb) . Intuitivno to pomeni, da lahko vsak mnogokotnik pobarvamo v dve barvi – z eno pobarvamo notranjost, z drugo pa zunanost. Če so v mnogokotniku sami orientabilni pari robov, bomo tudi po njihovi identifikaciji lahko ločili notranjost od zunanosti.

Za ploskev M pravimo, da je orientabilna, če zanjo obstaja kakšna orientabilna predstavitev.

Trditev 4.24 *Kompaktna ploskev M je **orientabilna** natanko tedaj, ko je homeomorfnna sferi ali povezani vsoti torusov.*

Dokaz. Ker standardne predstavitve sfere in povezane vsote torusov ne vsebujejo neorientabilnih parov, so to gotovo orientabilne ploskve.

Naj bo M ploskev, za katero obstaja vsaj ena orientabilna predstavitev (predstavitev brez neorientabilnih parov). To predstavitev z uporabo lem 4.16–4.20 klasifikacijskega izreka preoblikujemo do ene izmed predstavitev za sfero, povezano vsoto torusov ali povezano vsoto projektivnih ravnin.

Edina elementarna transformacija, ki lahko uvede neorientabilne pare, je refleksija. Refleksijo uporabimo le v lemah 4.17 in 4.18, pa še to zgolj takrat, ko neorientabilen par v predstavitvi za M že obstaja.

Izrek 4.15 nam tako pove, da lahko predstavitev za M , ki ne vsebuje neorientabilnih parov, preoblikujemo do predstavitve sfere ali povezane vsote torusov. \square

Poglavje 5

Netrivialni splet grafa K_6

5.1 Osnove teorije vozlov

V matematičnem jeziku je vozle vložitev krožnice v 3-razsežni evklidski prostor.



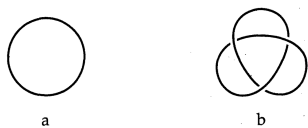
Slika 5.1: Izdelava vozla iz vrvice

Vozel je tako sklenjena zavozlana zanka iz neskončno tanke vrvice, ki sama sebe ne seka.

Definicija 5.1 *Vozel* Γ je vložitev $\Gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

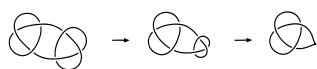
Najenostavnejši primer vozla je trivialni vozle. Vprašanje, ki si ga ob nekem vozlu zastavimo, je, ali se ga da odvozlati – preoblikovati do trivialnega vozla z nekim zaporedjem premikov, ki vozla ne poškodujejo. Vozla na sliki 5.1 nikakor ne moremo odvozlati, ne da bi vrvico prerezali. Takemu vozlu rečemo deteljica.

Premike, s katerimi lahko vozle preoblikujemo tako, da ga pri tem ne poškodujemo, želimo natančno definirati. Ujemajo naj se s premiki, ki bi jih



Slika 5.2: a) trivialni vozle ter b) deteljica

lahko izvedli, če bi preoblikovali vozle, narejen iz sklenjene vrvice. Vrvica očitno ne more prehajati sama skozi sebe, vozla na njej tudi ne moremo izničiti tako, da bi jo le dovolj zategnili.



Slika 5.3: Primer nedovoljene skrčitve vozla v eno samo točko

Premike definiramo s preslikavo, ki ji pravimo izotopija. Poskusimo s splošno definicijo izotopije za vložitvi med poljubnima topološkima prostora X in Y s Hausdorffovo lastnostjo.

Definicija 5.2 Vložitvi $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sta **izotopni**, če obstaja vložitev

$$F : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I},$$

za katero velja $F(x, t) = (f(x, t), t)$, $x \in X, t \in \mathbb{I}$ in $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$.

Izkaže se, da taka definicija za vozle ni dovolj dobra, saj dovoli premik, s katerim zanko v vozlu stisnemo v eno samo točko ter se je tako znebimo.



Slika 5.4: Veljavna operacija pri izotopiji, ki se vozla znebi s stiskom v točko.

Definicijo dovoljenih premikov popravimo, da preprečimo premik te vrste.

Definicija 5.3 Vložitvi $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sta **ambientno izotopni**, če obstaja homeomorfizem

$$H : Y \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}, H(y, t) = (h_t(y), t),$$

za katerega velja $f_1 = h_1 f_0$ ter $h_0 = id_Y$. Preslikavi H rečemo **ambientna izotopija**.

Ambientna izotopija definira izotopijo F , ki povezuje vložitvi f_0 in f_1 s $F(x, t) = (h_t f_0(x), t)$. Ohranja tudi homeomorfizem med komplementoma vložitev, kar preprečuje neveljaven stisk zanke v eno samo točko.

Za tako definirane premike velja, da sta vozla Γ in τ **ekvivalentna**, če sta ambientno izotopna. To pomeni, da lahko vozla Γ z veljavnimi premiki preoblikujemo do vozla τ . Vsak vozla, ki ga z ambientno izotopijo lahko preoblikujemo do trivialnega vozla, je moč odvozlati.

Definicija 5.4 Vozla Γ je **odsekoma linearen**, če je ambientno izotopen enostavnemu sklenjenemu večkotniku v \mathbb{R}^3 .

Prevezemimo, da so vsi omenjeni vozli odsekoma linearni, saj jih tako lahko predstavimo kot enostavne sklenjene večkotnike z stranicami in oglišči.

Geometrični opis vozlov v 3-razsežnem prostoru je zapleten. Vozle zato raje predstavimo s projekcijo na ravnino E v \mathbb{R}^3 . Želimo, da je slika vozla čim enostavnejša, a obenem vsebuje dovolj informacij, da bi tak vozla znali konstruirati tudi v 3-razsežnem prostoru. Projekcija mora tako zadostiti določenim zahtevam.

Projekcijo vozla Γ na ravnino E označimo s $p : \Gamma \rightarrow E$.

Definicija 5.5 Točka $a \in p(\Gamma)$ je **večkratna**, če je slika več kot ene točke vozla Γ . Točka a je **dvojna**, če je slika natanko dveh točk vozla Γ .

Definicija 5.6 Projekcija p odsekoma linearnega vozla Γ je **regularna**, če ustreza pogojem:

- (i) projekcija p ima le končno mnogo večkratnih točk $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, vse večkratne točke so dvojne;
- (ii) zožitev p na oglišča vozla je injektivna (nima večkratnih točk).

Ker je vozle odsekoma linearen, lahko govorimo o ogliščih vozla – to so oglišča enostavnega sklenjenega večkotnika, ki je vozlu ambientno izotopen.

Če vsako križanje (dvojne točke) v regularni projekciji primerno označimo, lahko vozle brez težav rekonstruiramo v prostoru. Če je bil vozle pred projekcijo orientiran, to tudi primerno označimo. Tako označeni projekciji vozla pravimo diagram vozla.



Slika 5.5: Diagram vozla

Isti vozle lahko predstavimo z različnimi diagrami. Vse take predstavitve vozla so med sabo ekvivalentne.

Vozli so lahko med sabo tudi prepleteni, rečemo, da tvorijo splet.

Definicija 5.7 *Splet* L je vložitev $L : \mathbb{S}^1 \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, kjer je n število komponent spleta.

Splet je množica med sabo prepletenih vozlov. Zanj veljajo vse lastnosti, ki smo jih obravnavali pri vozlih. Splete lahko z regularno projekcijo projiciramo v ravnino. Dva spleta sta ekvivalentna natanko tedaj, ko sta ekvivalentna njuna diagrama.



Slika 5.6: Projekciji Whiteheadovega spleta

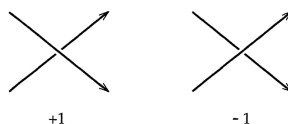


Slika 5.7: Primer ločljivega (trivialnega) in neločljivega spleta

Splet je **ločljiv**, če lahko ločimo njegove komponente z ravnino v \mathbb{R}^3 .

Prepletenost dveh spletov bi radi numerično izmerili, zato definiramo **spletno število**.

Naj bosta Γ in τ komponenti spleta L . Obema določimo orientacijo. Vsako križanje komponent Γ in τ ustreza enemu izmed primerov na sliki 5.8.

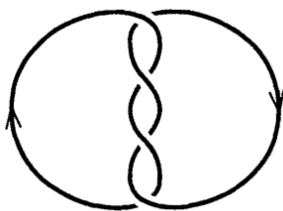


Slika 5.8: Primera križanj

Vsako križanje prvega tipa označimo s $+1$, vsako križanje drugega tipa pa z -1 . Včasih je težko določiti, ali gre za križanje prvega ali drugega tipa. Najlažje ju razlikujemo tako, da spodnjo puščico vrtimo v smeri urinega kazalca, dokler puščici nista prvič poravnani. Če takrat puščici kažeta v isto smer, gre za križanje prvega tipa, če kažeta v nasprotno, pa za križanje drugega tipa.

Seštejemo vse oznake križanj med Γ in τ ter vsoto delimo z 2. Rezultatu pravimo **spletno število**. Če orientacijo ene izmed komponent v spletu obrnemo, spletno število predznak spremeni.

Spletno število je neodvisno od projekcije spleta ter ostane nespremenjeno



Slika 5.9: Primer spleta s spletnim številom 0

ob ambientni izotopiji.

Trditev 5.8 *Spletno število je invariantno pod premiki ambientne izotopije.*

Dokaz trditve najdemo v [4].

Trditev 5.9 *Splet S je neločljiv, če je ima spletno število različno od 0.*

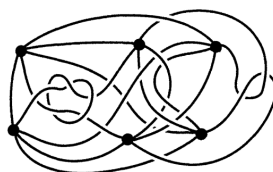
Dokaz. Ker je po trditvi 5.8 spletno število invariantno za premike ambientne izotopije, spletno število trivialnega spleta pa je 0, spleta S gotovo ne moremo ločiti – preoblikovati do trivialnega spleta. \square

5.2 Netrivialen splet grafa K_6

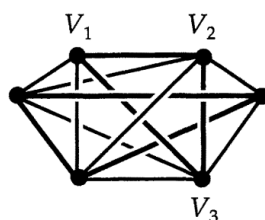
Graf $G = (V, E)$ je urejen par neprazne množice vozlišč V ter množice povezav E med vozlišči iz V . Graf, v katerem med poljubnima vozliščema obstaja povezava, je poln graf. K_6 označuje poln graf na šestih vozliščih.

Slika 5.10: Primer vložitev grafa K_6 v prostor

Grafa na sliki 5.10 vsekakor nista **izotopna**, sta pa gotovo **izomorfna**, ker sta oba polna grafa na šestih vozliščih. Predstavitvi grafa v prostoru pravimo **vložitev**.

Slika 5.11: Vložitev grafa K_6

Poljubna tri vozlišča grafa K_6 so paroma povezana in tvorijo cikel dolžine tri, recimo mu **trikotnik**. V grafu K_6 lahko naenkrat tvorimo dva disjunktna trikotnika. Najprej izberemo tri vozlišča V_1, V_2, V_3 prvega trikotnika, preostala vozlišča V_4, V_5 in V_6 pa so vozlišča drugega, prvemu disjunktnega trikotnika.

Slika 5.12: Par disjunktnih trikotnikov na treh vozliščih v K_6

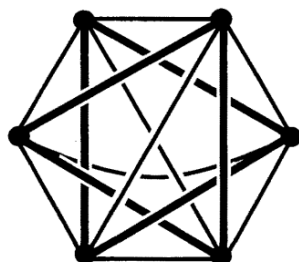
Vsak trikotnik si lahko predstavljamo kot trivialni vozle, par disjunktnih trikotnikov pa kot splet. Zanima nas, ali je splet dveh disjunktnih trikotnikov grafa K_6 v dani vložitvi ločljiv (primer na sliki 5.13).



Slika 5.13: Disjunktna trikotnika, ki ne tvorita spleta, ter disjunktna trikotnika, ki tvorita neločljivi splet.

Leta 1983 sta John H. Conway in Cameron Gordon v članku [3] dokazala, da poljubna vložitev grafa K_6 vsebuje vsaj en par disjunktnih trikotnikov, ki

tvori neločljivi splet. Poljubna vložitev grafa K_6 v prostor bo vedno vsebovala vsaj en neločljivi splet. Tudi če vložitev spreminjamo tako, da povezavi dovolimo prehajanje skozi druge ter tako trenutni splet izničimo, bomo gotovo kje v grafu naredili novega.



Slika 5.14: Primer neločljivega spleta disjunktnih trikotnikov v K_6

Izrek 5.10 Vsaka vložitev grafa K_6 vsebuje par disjunktnih trikotnikov, ki tvori neločljiv splet.

V poljubni vložitvi grafa K_6 je neločljivih spletoev lahko tudi več. Izrek nam zagotavlja, da vedno obstaja vsaj eden.

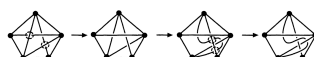
Dokaz. V grafu K_6 je natanko $\binom{6}{3} = 20$ različnih trikotnikov, vsak izmed njih je enolično določen z izbiro vozlišč. V paru disjunktnih trikotnikov izbira prvega enolično določa drugega, tako je v grafu K_6 natanko 10 različnih parov disjunktnih trikotnikov.

Izberimo poljubno vložitev grafa K_6 . Za vsak par disjunktnih trikotnikov lahko izračunamo spletno število. Predznak spletnega števila je odvisen od orientacije trikotnikov, a ker za dokaz ne bo pomemben, vzemimo kar njegovo absolutno vrednost. Označimo z U vsoto absolutnih vrednosti spletnih števil vseh parov disjunktnih trikotnikov dane vložitve.

Na sliki 5.14 je vložitev z enim samim parom disjunktnih trikotnikov, ki tvori splet s spletnim številom 1. Vrednost U te vložitve je 1.

Trditev 5.8 nam pove, da se spletno število ne spreminja ob premikih ambientne izotopije, torej je U enak za vse vložitve, ki so ambientno izotopne. Žal pa smo z ambientno izotopijo precej omejeni, saj vse vložitve grafa

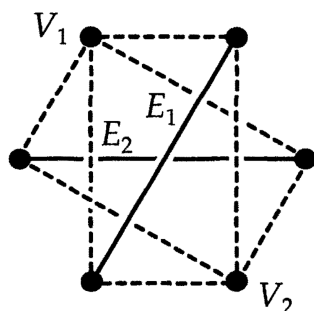
K_6 niso izotopne. Če dovolimo, da povezave prehajajo druga skozi drugo, se tej omejitvi res izognemo, spletna števila pa gotovo ne bodo več ostala nespremenjena.



Slika 5.15: Transformacija ene projekcije v drugo

Poiskati moramo neko drugo invarianto, povezano s spletnim številom, ki se ob takih transformacijah ohranja. Označimo z $V = U \pmod{2}$ ostanek pri deljenju U z 2. Trdimo, da ostane vrednost V konstantna.

Operacije ambientne izotopije spletnih števil ne spreminjajo, zato ne spreminjajo vrednosti U in V . Recimo, da povezava E_1 prehaja skozi neko drugo povezavo E_2 . Če velja $E_1 = E_2$ vrednosti U gotovo ne spreminjamo, saj si disjunktna trikotnika ne delita povezave. Prav tako ne spreminjamo vrednosti U , ko imata povezavi E_1 in E_2 skupno krajišče, saj disjunktna trikotnika nimata skupnih krajišč. Število U se spremeni le, če povezavi E_1 in E_2 nimata skupnih krajišč.



Slika 5.16: Prehod povezav brez skupnih krajišč

Za par disjunktnih trikotnikov, v katerem eden izmed trikotnikov vsebuje E_1 , drugi pa E_2 , se bo s prehodom povezav spletno število povečalo ali zmanjšalo za 1. Za povezavi E_1 in E_2 obstajata le dve vozlišči grafa K_6 , ki nista krajišči nobene izmed njiju – označimo taki vozlišči z v in v' . Prvi

par disjunktne trikotnikov tvori vozlišče v skupaj s krajišči povezave E_1 ter vozlišče v' skupaj s krajišči povezave E_2 , drugi par pa vozlišče v skupaj s krajišči povezave E_2 ter vozlišče v' skupaj s krajišči povezave E_1 . To sta edina disjunktne para, ki vključujeta povezavi E_1 in E_2 . Ker prehod povezave vsakemu paru spletno število poveča ali zmanjša za 1, se U spremeni za $-2, 0$ ali 2 . Ker je sprememba U soda, ostane število $V = U \pmod{2}$ nespremenjeno. Ker lahko z uporabo teh operacij poljubno vložitev transformiramo v poljubno drugo, je V enak za vse vložitev grafa K_6 .

Na sliki 5.14 je vložitev K_6 , za katerega je $U = 1$, torej je tudi $V = 1$. Ker je enak za vse vložitev grafa K_6 , je U vselej različen od 0. V vsaki vložitvi grafa K_6 je tako vsaj en par disjunktne trikotnikov, ki tvorita splet z neničelnim spletnim številom. Tak splet je po trditvi 5.9 neločljiv. \square

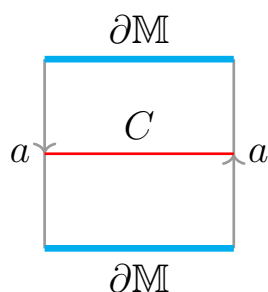
Izrek velja tudi za vsak graf, ki vsebuje K_6 kot podgraf. Pravimo, da je graf **intrinzično povezan**, če ima vsaka njegova vložitev kakšen neločljivi splet.

Poglavje 6

Vložljivost ploskev v \mathbb{R}^3

6.1 Povezava med \mathbb{M} in K_6

Meridiana C Möbiusovega traku je daljica, ki v predstavitvi Möbiusovega traku s pravokotnikom povezuje razpolovišča identificiranih robov. **Rob** $\partial\mathbb{M}$ sestavljata neidentificirani stranici pravokotnika.



Slika 6.1: \mathbb{M}

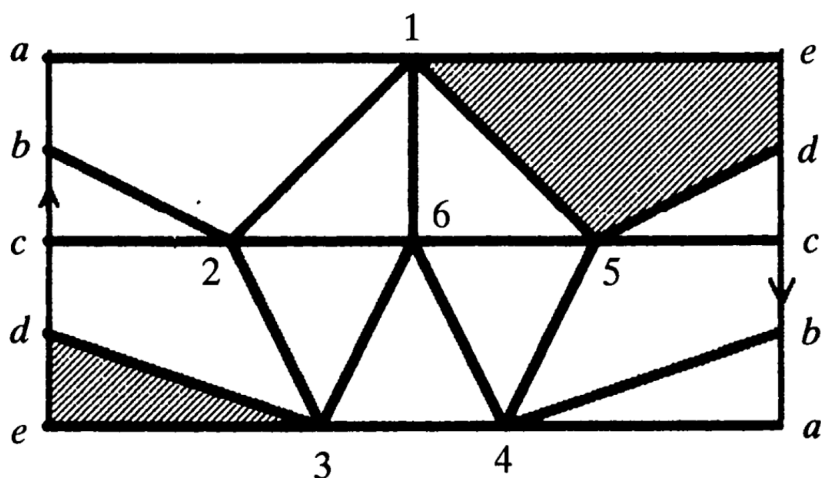
Lema 6.1 V vsaki vložitvi \mathbb{M} v \mathbb{R}^3 tvorita $\partial\mathbb{M}$ in meridiana C neločljivi (netrivialni) splet.

Dokaz. Triangulaciji Möbiusovega traku priredimo graf K_6 , kot je prikazano na sliki 6.2, ter oglišča grafa označimo s številkami $\{1, 2, \dots, 6\}$. Poljuben par oglišč leži na istem 1-simpleksu, torej je povezan. Trikotnik, ki ga tvorijo oglišča 134, je rob $\partial\mathbb{M}$, trikotnik, ki ga tvorijo oglišča 256, pa meridiana C .

Graf K_6 vsebuje 10 parov disjunktnih trikotnikov, v našem primeru so pari naslednji:

$$(123, \underline{456}), (\underline{124}, 356), (125, \underline{346}), (\underline{126}, 345), (134, 256),$$

$$(\underline{135}, 246), (136, \underline{245}), (145, \underline{236}), (146, \underline{235}), (\underline{156}, 234).$$



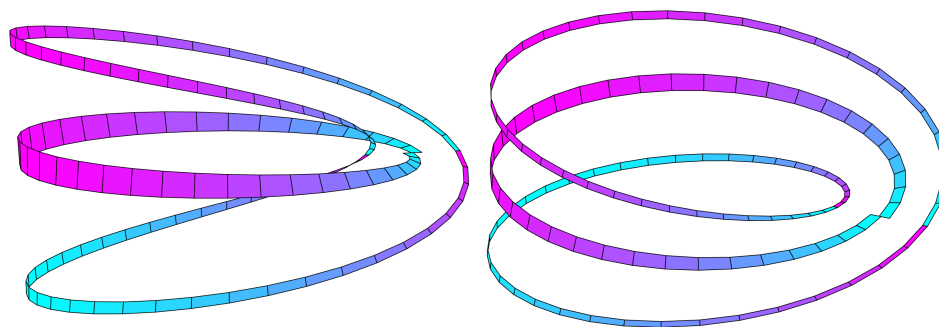
Slika 6.2: Graf K_6 v Möbiusovem traku

1-simpleksi vsakega izmed podčrtanih trikotnikov so meja nekega 2-simpleksa v triangulaciji, torej s trikotnikom v paru gotovo tvorijo nepovezan (trivialen) splet. Ker ima graf K_6 po izreku 5.10 vsaj en neločljiv splet, je to splet para $(134, 256)$, v katerem sta meja in meridiana Möbiusovega traku. \square

Sledi, da ima Möbiusov trak v vsaki vložitvi v \mathbb{R}^3 neločljivi splet, ki ga tvorita rob in meridiana. Neločljivi splet ene izmed vložitev je na sliki 6.3.

6.2 Nevložljivost neorientabilnih ploskev

Vemo, da je kompaktna ploskev brez roba neorientabilna natanko tedaj, ko vsebuje Möbiusov trak. V poglavju 2 smo pokazali, da je projektivna ravnina sestavljena iz Möbiusovega traku ter diska, ki je nalepljen na njegov rob.



Slika 6.3: Neločljivi splet v Möbiusovem traku

Meridiana in rob, na katerega je prilepljen disk, tvorita neločljivi splet v vsaki vložitvi.

Izrek 6.2 *Projektivna ravnina \mathbb{P} ni vložljiva v \mathbb{R}^3 .*

Dokaz. Predpostavimo, da obstaja vložitev \mathbb{P} v \mathbb{R}^3 . Če iz \mathbb{P} izrežemo disk \mathbb{D} , dobimo Möbiusov trak M . Rob ∂M in meridiana tvorita neločljivi splet, torej se meridiana C in disk \mathbb{D} sekata. \square

Podobno dokažemo nevložljivost Kleinove steklenice.

Trditev 6.3 *Kleinova steklenica \mathbb{K} ni vložljiva v \mathbb{R}^3 .*

Dokaz. Kleinova steklenica je povezana vsota projektivne ravnine in Möbiusovega traku. Dobimo jo tako, da dva Möbiusova trakova zlepimo po robu. Ker rob z meridiano tvori neločljivi splet v vsaki vložitvi, se Möbiusova trakova v \mathbb{R}^3 sekata. \square

Enak argument drži za vse neorientabilne kompaktno ploskve brez roba.

Trditev 6.4 *Kompaktna ploskev brez roba je vložljiva v \mathbb{R}^3 natanko tedaj, ko je orientabilna.*

Dokaz. V vsaki neorientabilni ploskvi lahko najdemo Möbiusov trak. Ker je ploskev 2-mnogoterost brez roba, je na rob Möbiusovega traku gotovo nekaj prilepljeno, torej vložitev v \mathbb{R}^3 ne obstaja.

Če je kompaktna ploskev brez roba orientabilna, je homeomorfna sferi ali povezani vsoti torusov, torej ima vložitev v \mathbb{R}^3 . \square

Literatura

- [1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [2] Jaka Smrekar in Aleš Vavpetič. *Rešene naloge iz geometrijske topologije*. DMFA - založništvo, 2014.
- [3] John H. Conway in Cameron McA. Gordon. Knots and links in spatial graphs. *Journal of Graph Theory*, 7:445–453, 1983.
- [4] Gerhard Burde in Heiner Zieschang. *Knots*. De Gruyter studies in mathematics. Walter de Gruyter, 2003.
- [5] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2000.
- [6] Peter Pavešič. *Splošna topologija*. DMFA - založništvo, 2008.
- [7] Sašo Strle. Izbrane teme iz geometrijske topologije. Dosegljivo: https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/34162/mod_resource/content/0/itgt.pdf, 2016. [Dostopano: 15. 9. 2018].